

Chapitre 17 – Corrections

Dénombrement et combinatoire

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Choisir sans ordre

Un groupe n'est pas ordonné et une personne n'y apparaît pas deux fois : le nombre est $\binom{5}{2} = 10$.

Exercice 2 – Choisir sans ordre

Un groupe n'est pas ordonné et une personne n'y apparaît pas deux fois : le nombre est $\binom{6}{3} = 20$.

Exercice 3 – Choisir sans ordre

Un groupe n'est pas ordonné et une personne n'y apparaît pas deux fois : le nombre est $\binom{8}{2} = 28$.

Exercice 4 – Choisir avec ordre

Il y a 5 choix pour la première place, puis un choix de moins à chaque étape. Le nombre vaut $5!/(5-2)! = 20$.

Exercice 5 – Choisir avec ordre

Il y a 6 choix pour la première place, puis un choix de moins à chaque étape. Le nombre vaut $6!/(6-3)! = 120$.

Exercice 6 – Choisir avec ordre

Il y a 8 choix pour la première place, puis un choix de moins à chaque étape. Le nombre vaut $8!/(8-2)! = 56$.

Exercice 7 – Sous-ensembles

Chaque élément peut appartenir ou non à la partie : $2^3 = 8$ parties. Celles de cardinal deux sont au nombre de $\binom{3}{2} = 3$.

Exercice 8 – Sous-ensembles

Chaque élément peut appartenir ou non à la partie : $2^4 = 16$ parties. Celles de cardinal deux sont au nombre de $\binom{4}{2} = 6$.

Exercice 9 – Sous-ensembles

Chaque élément peut appartenir ou non à la partie : $2^6 = 64$ parties. Celles de cardinal deux sont au nombre de $\binom{6}{2} = 15$.

Exercice 10 – Mots

Avec répétition : $3^3 = 27$. Sans répétition : $3! = 6$ pour une longueur de trois.

Exercice 11 – Mots

Avec répétition : $3^4 = 81$. Sans répétition : aucun, car la longueur dépasse le nombre de lettres disponibles.

Exercice 12 – Mots

Avec répétition : $3^5 = 243$. Sans répétition : aucun, car la longueur dépasse le nombre de lettres disponibles.

Exercice 13 – Permutation

Le nombre est $4! = 24$, par produit des nombres de choix successifs.

Exercice 14 – Permutation

Le nombre est $5! = 120$, par produit des nombres de choix successifs.

Exercice 15 – Permutation

Le nombre est $6! = 720$, par produit des nombres de choix successifs.

Exercice 16 – Approfondissement : répétitions

Il y a cinq lettres avec deux M, deux A et un N. Les $5!$ permutations étiquetées comptent chaque mot $2!2!$ fois. Le nombre est $5!/(2!2!) = 30$.

Exercice 17 – Approfondissement : surjections

Il existe $2^3 = 8$ applications. Les seules non surjectives sont les deux applications constantes. Il reste 6 surjections.

Exercice 18 – Approfondissement : Pascal

Dans un ensemble de $n + 1$ éléments, distinguer un élément. Une partie de cardinal $k + 1$ le contient, et l'on choisit alors k éléments parmi les n restants ; ou ne le contient pas, et l'on en choisit $k + 1$. Les deux cas sont disjoints.

Exercice 19 – Approfondissement : complémentaire

Les $n - 1$ autres éléments sont choisis librement : il y en a 2^{n-1} . C'est la moitié des 2^n parties.

Exercice 20 – Approfondissement : couples disjoints

Chaque élément a trois états possibles : dans A, dans B ou dans aucune des deux parties. Les choix sont indépendants au sens combinatoire ; le nombre est 3^n .