

Chapitre 18 – Corrections

Probabilités finies et variables aléatoires

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Équiprobabilité

Les 6 issues sont équiprobables et 2 sont favorables. La probabilité vaut $2/6 = \frac{1}{3}$.

Exercice 2 – Équiprobabilité

Les 8 issues sont équiprobables et 3 sont favorables. La probabilité vaut $3/8 = \frac{3}{8}$.

Exercice 3 – Équiprobabilité

Les 10 issues sont équiprobables et 4 sont favorables. La probabilité vaut $4/10 = \frac{2}{5}$.

Exercice 4 – Loi de Bernoulli

$E(X) = \frac{1}{4}$ et $E(X^2) = E(X)$ puisque $X^2 = X$. Donc $V(X) = p - p^2 = p(1 - p) = \frac{3}{16}$.

Exercice 5 – Loi de Bernoulli

$E(X) = \frac{1}{3}$ et $E(X^2) = E(X)$ puisque $X^2 = X$. Donc $V(X) = p - p^2 = p(1 - p) = \frac{2}{9}$.

Exercice 6 – Loi de Bernoulli

$E(X) = \frac{2}{5}$ et $E(X^2) = E(X)$ puisque $X^2 = X$. Donc $V(X) = p - p^2 = p(1 - p) = \frac{6}{25}$.

Exercice 7 – Loi binomiale

$P(X = 0) = (1 - p)^3 = \frac{1}{8}$. $E(X) = np = \frac{3}{2}$ et $V(X) = np(1 - p) = \frac{3}{4}$. La loi suppose des épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

Exercice 8 – Loi binomiale

$P(X = 0) = (1 - p)^4 = \frac{16}{81}$. $E(X) = np = \frac{4}{3}$ et $V(X) = np(1 - p) = \frac{8}{9}$. La loi suppose des épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

Exercice 9 – Loi binomiale

$P(X = 0) = (1 - p)^5 = \frac{243}{1024}$. $E(X) = np = \frac{5}{4}$ et $V(X) = np(1 - p) = \frac{15}{16}$. La loi suppose des épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

Exercice 10 – Probabilité conditionnelle

$P(A) > 0$, donc $P(B | A) = P(A \cap B)/P(A) = 2/4 = \frac{1}{2}$. On divise par la probabilité de l'événement sur lequel on conditionne.

Exercice 11 – Probabilité conditionnelle

$P(A) > 0$, donc $P(B | A) = P(A \cap B)/P(A) = 2/5 = \frac{2}{5}$. On divise par la probabilité de l'événement sur lequel on conditionne.

Exercice 12 – Probabilité conditionnelle

$P(A) > 0$, donc $P(B | A) = P(A \cap B)/P(A) = 2/6 = \frac{1}{3}$. On divise par la probabilité de l'événement sur lequel on conditionne.

Exercice 13 – Au moins un succès

Le contraire est « tous Face », de probabilité $(1/2)^3$. Le résultat vaut $1 - 2^{-3} = \frac{7}{8}$.

Exercice 14 – Au moins un succès

Le contraire est « tous Face », de probabilité $(1/2)^4$. Le résultat vaut $1 - 2^{-4} = \frac{15}{16}$.

Exercice 15 – Au moins un succès

Le contraire est « tous Face », de probabilité $(1/2)^5$. Le résultat vaut $1 - 2^{-5} = \frac{31}{32}$.

Exercice 16 – Approfondissement : Bayes

$P(T) = 0,01 \times 0,9 + 0,99 \times 0,05 = 0,0585$. Bayes donne $P(M | T) = 0,009/0,0585 = 2/13 \approx 15,38\%$. Un test positif ne signifie pas automatiquement une probabilité de maladie de 90

Exercice 17 – Approfondissement : indépendance

$P(A) = P(B) = 1/2$. L'intersection demande deux résultats pairs, donc $P(A \cap B) = 9/36 = 1/4 = P(A)P(B)$. Les événements sont indépendants.

Exercice 18 – Approfondissement : covariance

$X(1 - X) = 0$, donc $E[X(1 - X)] = 0$. La covariance vaut $0 - p(1 - p) = -p(1 - p)$. Les deux variables sont fortement dépendantes, sauf cas dégénérés.

Exercice 19 – Approfondissement : concentration

Bienaymé-Tchebychev donne $P(|X - E(X)| \geq a) \leq V(X)/a^2$. Ici la borne vaut $4/25 = 0,16$. Il s'agit d'une borne et non d'une égalité.

Exercice 20 – Approfondissement : moyenne

Par linéarité, $E(\bar{X}) = p$. Par indépendance, les variances s'additionnent : $V(\bar{X}) = np(1 - p)/n^2 = p(1 - p)/n$. Tchebychev donne alors $P(|\bar{X} - p| \geq \varepsilon) \leq p(1 - p)/(n\varepsilon^2)$.