

Chapitre 18 – Cours

Probabilités finies et variables aléatoires

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer conditionnement et indépendance
- Utiliser les lois de Bernoulli et binomiale
- Étudier espérance, variance et concentration

1. Univers fini

Une probabilité attribue à chaque événement un nombre entre zéro et un, avec additivité pour des événements disjoints et probabilité totale un.

L'équiprobabilité permet de diviser l'effectif favorable par l'effectif total, mais doit être justifiée par le modèle.

Pour des événements quelconques, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Conditionnement et indépendance

Si $P(B) > 0$, $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$.

Une partition (B_i) dont les événements ont une probabilité strictement positive donne la formule des probabilités totales $P(A) = \sum_i P(B_i)P(A | B_i)$.

La formule de Bayes inverse un conditionnement.

Deux événements sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; cela ne signifie pas qu'ils sont incompatibles.

Des événements incompatibles de probabilités positives ne sont pas indépendants.

3. Variables aléatoires

Une variable aléatoire réelle associe un nombre à chaque issue.

Sa loi précise les valeurs possibles et leurs probabilités.

Sur un univers fini, $E(X) = \sum_x xP(X = x)$ et $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$.

L'espérance est linéaire sans hypothèse d'indépendance.

Pour la variance d'une somme, des covariances apparaissent ; l'indépendance permet de les annuler.

4. Loïs usuelles

Une Bernoulli de paramètre p a espérance p et variance $p(1 - p)$.

Une somme de n Bernoulli indépendantes de même paramètre suit la loi binomiale : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Son espérance vaut np et sa variance $np(1 - p)$.

Le dénombrement des positions des succès explique le coefficient binomial.

5. Concentration et exemple

Pour $X \geq 0$, Markov donne $P(X \geq a) \leq E(X)/a$ pour $a > 0$.

Appliquée au carré de l'écart à la moyenne, elle donne Tchebychev.

La moyenne de n variables indépendantes de même loi et de variance finie a une variance divisée par n .

Cela explique mathématiquement la réduction des fluctuations.

Une borne de concentration ne donne pas une probabilité exacte : il faut distinguer résultat universel, estimation et calcul de loi spécifique.

Distinguer événement et variable

Définition – Événement associé à une variable

Sur un univers fini Ω , une variable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ transforme une issue en nombre. L'écriture $\{X = x\}$ désigne l'événement constitué des issues donnant cette valeur. La loi de X regroupe les probabilités de ces événements disjoints, dont la réunion est Ω .

Propriété – Tchebychev et fluctuation

Pour toute variable réelle de variance finie et tout $a > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

On applique Markov à la variable positive $(X - E(X))^2$. La borne reste vraie lorsqu'elle dépasse 1, mais elle est alors peu informative ; une probabilité exacte appartient toujours à $[0; 1]$.

Méthode – Calculer une variance

Déterminer d'abord l'espérance puis le second moment. Former ensuite $E(X^2) - E(X)^2$ et contrôler la positivité du résultat. Une valeur négative révèle une erreur de calcul, puisque la définition de la variance est une espérance de carré.

Exemple résolu – 1. Inverser un conditionnement avec Bayes

Une urne U_1 , choisie avec probabilité $1/3$, contient deux boules blanches et une noire. L'urne U_2 , choisie avec probabilité $2/3$, contient une blanche et deux noires. On tire uniformément une boule dans l'urne choisie.

1. Noter B l'événement « blanche ». Les probabilités conditionnelles valent $P(B | U_1) = 2/3$ et $P(B | U_2) = 1/3$.
2. Les urnes forment une partition. Donc $P(B) = (1/3)(2/3) + (2/3)(1/3) = 4/9$.
3. Comme $P(B) > 0$, Bayes donne $P(U_1 | B) = P(U_1)P(B | U_1)/P(B) = 1/2$.

Observer une blanche rend les deux urnes équiprobables, alors qu'elles ne l'étaient pas initialement.

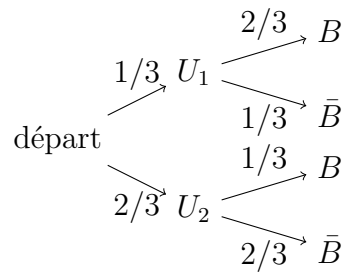
Exemple résolu – 2. Construire une loi binomiale

On lance trois fois une pièce équilibrée, indépendamment. Soit X le nombre de faces obtenues.

1. Chaque suite de trois résultats a probabilité $1/8$. L'événement $X = k$ correspond à choisir les k positions des faces parmi trois.
2. La loi est donc $P(X = 0) = 1/8$, $P(X = 1) = 3/8$, $P(X = 2) = 3/8$, $P(X = 3) = 1/8$. La somme vaut bien un.
3. Écrire $X = I_1 + I_2 + I_3$ avec des indicatrices de Bernoulli indépendantes donne $E(X) = 3/2$ et $V(X) = 3/4$.

La linéarité de l'espérance suffit pour la moyenne ; l'indépendance sert ici à additionner les variances.

Un arbre et des probabilités de chemins



Un chemin se calcule en multipliant ses probabilités successives. L'événement B réunit deux chemins disjoints, donc leurs probabilités s'additionnent. Les nombres d'une seconde branche sont conditionnels à l'urne déjà choisie.

À retenir – Bilan

Toujours annoncer l'expérience et les événements. L'équiprobabilité est une hypothèse du modèle, l'indépendance une relation à justifier, et le conditionnement exige une probabilité non nulle. Une loi se contrôle par sa positivité et sa somme ; une borne de concentration se présente comme une majoration.
