

Chapitre 19 – Corrections

Séries numériques et sommation

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Série géométrique

Le module de la raison est inférieur à un. Les sommes partielles convergent vers $1/(1-q) = 2$. La série est même absolument convergente.

Exercice 2 – Série géométrique

Le module de la raison est inférieur à un. Les sommes partielles convergent vers $1/(1-q) = \frac{3}{2}$. La série est même absolument convergente.

Exercice 3 – Série géométrique

Le module de la raison est inférieur à un. Les sommes partielles convergent vers $1/(1-q) = \frac{2}{3}$. La série est même absolument convergente.

Exercice 4 – Divergence grossière

Le terme général tend vers 1, et non vers zéro. La série diverge par la condition nécessaire de convergence. Une limite non nulle suffit ; aucune comparaison supplémentaire n'est utile.

Exercice 5 – Divergence grossière

Le terme général tend vers 1, et non vers zéro. La série diverge par la condition nécessaire de convergence. Une limite non nulle suffit ; aucune comparaison supplémentaire n'est utile.

Exercice 6 – Divergence grossière

Le terme général tend vers 1, et non vers zéro. La série diverge par la condition nécessaire de convergence. Une limite non nulle suffit ; aucune comparaison supplémentaire n'est utile.

Exercice 7 – Série de Riemann

C'est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$: elle converge. L'intégrale de x^{-2} à l'infini donne un contrôle des restes, de l'ordre de N^{1-2} .

Exercice 8 – Série de Riemann

C'est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$: elle converge. L'intégrale de x^{-3} à l'infini donne un contrôle des restes, de l'ordre de N^{1-3} .

Exercice 9 – Série de Riemann

C'est une série de Riemann d'exposant $4 > 1$: elle converge. L'intégrale de x^{-4} à l'infini donne un contrôle des restes, de l'ordre de N^{1-4} .

Exercice 10 – Série télescopique

Les sommes partielles laissent les 1 premiers termes, moins 1 termes terminaux tendant vers zéro. La somme vaut $\sum_{k=1}^1 1/k = 1$.

Exercice 11 – Série télescopique

Les sommes partielles laissent les 2 premiers termes, moins 2 termes terminaux tendant vers zéro. La somme vaut $\sum_{k=1}^2 1/k = \frac{3}{2}$.

Exercice 12 – Série télescopique

Les sommes partielles laissent les 3 premiers termes, moins 3 termes terminaux tendant vers zéro. La somme vaut $\sum_{k=1}^3 1/k = \frac{11}{6}$.

Exercice 13 – Comparaison

Les termes sont positifs et majorés par $1/n^2$. La série de Riemann d'exposant deux converge, donc la série étudiée converge par comparaison.

Exercice 14 – Comparaison

Les termes sont positifs et majorés par $1/n^2$. La série de Riemann d'exposant deux converge, donc la série étudiée converge par comparaison.

Exercice 15 – Comparaison

Les termes sont positifs et majorés par $1/n^2$. La série de Riemann d'exposant deux converge, donc la série étudiée converge par comparaison.

Exercice 16 – Approfondissement : harmonique

Pour $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n 1/k \geq \int_1^{n+1} dx/x = \ln(n+1)$, qui tend vers $+\infty$. Le terme général tend pourtant vers zéro : cette condition n'est pas suffisante.

Exercice 17 – Approfondissement : équivalent

La quantité conjuguée donne $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \sim 1/(2\sqrt{n})$. Le terme est donc équivalent à $1/(2n^{3/2})$, positif, et la série converge.

Exercice 18 – Approfondissement : somme et reste

Le terme vaut $1/n - 1/(n+1)$. La somme partielle vaut $1 - 1/(N+1)$, donc la somme totale est 1 et le reste vaut exactement $1/(N+1)$.

Exercice 19 – Approfondissement : convergence absolue

Le module du terme est majoré par $1/n^2$, dont la série converge. La série est absolument convergente, donc convergente. On n'a pas besoin de connaître les signes de $\sin n$.

Exercice 20 – Approfondissement : comparaison intégrale

La fonction x^{-2} est positive décroissante. La méthode des rectangles donne $\int_{N+1}^{\infty} x^{-2} dx \leq R_N \leq \int_N^{\infty} x^{-2} dx$. Donc $1/(N+1) \leq R_N \leq 1/N$.