Chapitre 20 – Corrections

Fonctions de deux variables : initiation CPGE

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Dérivées partielles

En dérivant par rapport à x, y est constant : $\partial_x f = 2x + 1y$. En dérivant par rapport à y, x est constant : $\partial_y f = 1x + 2y$.

Exercice 2 – Dérivées partielles

En dérivant par rapport à x, y est constant : $\partial_x f = 2x + 2y$. En dérivant par rapport à y, x est constant : $\partial_y f = 2x + 2y$.

Exercice 3 – Dérivées partielles

En dérivant par rapport à x, y est constant : $\partial_x f = 2x + 3y$. En dérivant par rapport à y, x est constant : $\partial_y f = 3x + 2y$.

Exercice 4 – Gradient

$\partial_x f = 1e^{1x+y}$ et $\partial_y f = e^{1x+y}$. Au point demandé, $\nabla f(0,0) = (1,1)$.

Exercice 5 – Gradient

$\partial_x f = 2e^{2x+y}$ et $\partial_y f = e^{2x+y}$. Au point demandé, $\nabla f(0,0) = (2,1)$.

Exercice 6 – Gradient

$\partial_x f = 3e^{3x+y}$ et $\partial_y f = e^{3x+y}$. Au point demandé, $\nabla f(0,0) = (3,1)$.

Exercice 7 – Règle de la chaîne

Directement, $g(t) = (1+1)t^2$, donc $g\prime(t) = 4t$. Par la chaîne : $\partial_x f \cdot 1 + \partial_y f \cdot 1 = 2t + 2(1t)1$, même résultat.

Exercice 8 – Règle de la chaîne

Directement, $g(t) = (1+4)t^2$, donc $g\prime(t) = 10t$. Par la chaîne : $\partial_x f \cdot 1 + \partial_y f \cdot 2 = 2t + 2(2t)2$, même résultat.

Exercice 9 – Règle de la chaîne

Directement, $g(t) = (1+16)t^2$, donc $g\prime(t) = 34t$. Par la chaîne : $\partial_x f \cdot 1 + \partial_y f \cdot 4 = 2t + 2(4t)4$, même résultat.

Exercice 10 – Courbe de niveau

Le niveau est le cercle de centre l'origine et de rayon 1. Son gradient $(2x, 2y)$ est radial et normal à la courbe en chaque point.

Exercice 11 – Courbe de niveau

Le niveau est le cercle de centre l'origine et de rayon 2. Son gradient $(2x, 2y)$ est radial et normal à la courbe en chaque point.

Exercice 12 – Courbe de niveau

Le niveau est le cercle de centre l'origine et de rayon 3. Son gradient $(2x, 2y)$ est radial et normal à la courbe en chaque point.

Exercice 13 – Extremum global

Chaque carré est positif ou nul. La somme atteint son minimum zéro uniquement si $x = 1$ et $y = -1$. Le point $(1, -1)$ est donc l'unique minimum global.

Exercice 14 – Extremum global

Chaque carré est positif ou nul. La somme atteint son minimum zéro uniquement si $x = 2$ et $y = -1$. Le point $(2, -1)$ est donc l'unique minimum global.

Exercice 15 – Extremum global

Chaque carré est positif ou nul. La somme atteint son minimum zéro uniquement si $x = 3$ et $y = -1$. Le point $(3, -1)$ est donc l'unique minimum global.

Exercice 16 – Approfondissement : point selle

Le gradient s'annule en zéro. Mais sur l'axe $y = 0$, $f = x^2 \geq 0$, et sur l'axe $x = 0$, $f = -y^2 \leq 0$. Tout voisinage contient des valeurs positives et négatives : c'est un point selle.

Exercice 17 – Approfondissement : limite

Sur la droite $y = 0$, la valeur est zéro. Sur $y = x \neq 0$, elle vaut $1/2$. Les deux chemins tendent vers l'origine avec des limites différentes : la limite n'existe pas.

Exercice 18 – Approfondissement : différentiel

$f(0, 0) = 1$ et les deux dérivées partielles valent 1. Comme f est de classe C^1, $f(h, k) = 1 + h + k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$. Le plan tangent au graphe a pour équation $z = 1 + x + y$.

Exercice 19 – Approfondissement : trajectoire

$f \circ \gamma = \cos t \sin t = \sin(2t)/2$, donc la dérivée vaut $\cos 2t$. La chaîne donne aussi $\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t$, soit $\cos^2 t - \sin^2 t$.

Exercice 20 – Approfondissement : ouvert

Pour un point de norme $r < 1$, la boule de rayon $1 - r$ centrée en ce point reste dans le disque par l'inégalité triangulaire. Un point du cercle frontière du disque fermé n'a aucune boule entièrement incluse, car on peut avancer radialement vers l'extérieur.