

Chapitre 1 – Corrigés

Ensembles de nombres et intervalles

Solutions des exercices 1 à 20

Exercice 1 – Ensembles de nombres

On choisit le plus petit ensemble de la liste proposée :

$$7 \in \mathbb{N}; \quad -4 \in \mathbb{Z}; \quad \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}; \quad 2,75 = \frac{11}{4} \in \mathbb{Q}; \quad \sqrt{3} \in \mathbb{R}; \quad -\frac{12}{4} = -3 \in \mathbb{Z}.$$

$\sqrt{3}$ est irrationnel : il n'appartient donc pas à $\mathbb{Q}$.

Exercice 2 – Appartenance

$$-2 \notin \mathbb{N}, \quad -2 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}, \quad \pi \in \mathbb{R}.$$

Un entier négatif n'est pas naturel ; une racine carrée n'est pas nécessairement rationnelle.

Exercice 3 – Vrai ou faux

a) Vrai : tout naturel n s'écrit $n/1$. b) Faux : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. c) Vrai : 0 est naturel. d) Vrai : $-7 = -7/1$. e) Vrai : $\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 – Des inégalités aux intervalles

a) $[-3; 5]$; b) $] -\infty; 4[$; c) $[-2; +\infty[$; d) $]1; 9]$; e) $] -5; 2[$. Une borne est incluse si l'inégalité est large. Les infinis sont toujours exclus.

Exercice 5 – Des intervalles aux inégalités

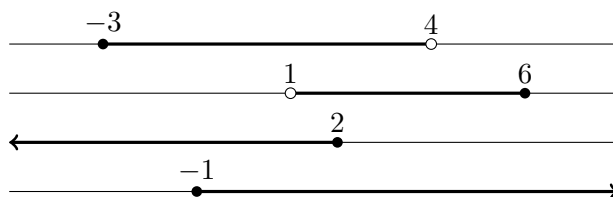
a) $-4 \leq x \leq 2$; b) $x > 3$; c) $x < 7$; d) $-1 < x \leq 6$; e) $0 \leq x < 12$.

Exercice 6 – Appartenance à un intervalle

Dans $I =]-2; 5]$, $-2 \notin I$, tandis que 0, 3 et 5 appartiennent à I ; $6 \notin I$. Le crochet ouvert exclut -2 , le crochet fermé inclut 5.

Exercice 7 – Représentations

Sur chaque dessin, un disque plein signifie « inclus », un cercle vide « exclu ».



Exercice 8 – Intersection et réunion

L'intersection retient les nombres communs ; la réunion retient les nombres appartenant à au moins un intervalle.

$$A \cap B = [1; 3], \quad A \cup B = [-4; 7].$$

Exercice 9 – Intervalles non bornés

$$A \cap B = [2; 5[, \quad A \cup B = \mathbb{R}.$$

Les deux intervalles se recouvrent entre 2 et 5, et leur réunion ne laisse aucun réel de côté.

Exercice 10 – Valeur absolue

Dans l'ordre : 7 ; 9 ; $|3 - 8| = 5$; $|-4 - 2| = 6$; $|5 - (-3)| = 8$. Une valeur absolue est positive ou nulle.

Exercice 11 – Distances

On utilise $d(a, b) = |a - b|$. **a)** 8 ; **b)** $|1/2 + 3/2| = 2$; **c)** 5 ; **d)** 5.

Exercice 12 – Valeur absolue vers intervalle

On traduit $|x - a| \leq r$ par $a - r \leq x \leq a + r$. **a)** $[-4; 4]$; **b)** $] - 2; 2[$; **c)** $[-2; 8]$; **d)** $] - 6; 2[$.

Exercice 13 – Intervalle vers valeur absolue

Le centre est la moyenne des bornes ; le rayon est leur demi-différence. **a)** $|x| \leq 5$; **b)** $|x - 5| \leq 3$; **c)** $|x - 2| < 5$; **d)** $|x + 1| \leq 3$.

Exercice 14 – Entiers dans un intervalle

-4 est exclu et 5 est inclus. Les entiers sont -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 : il y en a **9**.

Exercice 15 – Trois intervalles

On prend la plus grande borne inférieure et la plus petite borne supérieure :

$$A \cap B \cap C =] - 1; 2[.$$

Les deux bornes sont exclues, respectivement par B et par A .

Exercice 16 – Approfondissement : deux intervalles

$A \cap B =]1; 4]$; les entiers sont 2, 3, 4 ; $A \cup B = [-5; 8[$. Enfin $1 < \sqrt{10} < 4$ car $1 < 10 < 16$: $\sqrt{10}$ appartient à l'intersection.

Exercice 17 – Approfondissement : contraintes simultanées

$|x - 2| \leq 5 \iff -3 \leq x \leq 7$. Il faut encore $x > 0$; donc

$$S = [-3; 7] \cap]0; +\infty[= \boxed{]0; 7]}.$$

Exercice 18 – Approfondissement : couronne de distances

Les contraintes sont $|x - 5| < 3$ et $|x - 5| \geq 1$. La première donne $2 < x < 8$; la seconde donne $x \leq 4$ ou $x \geq 6$.

$$S =]2; 4] \cup [6; 8[.$$

**Exercice 19 – Approfondissement : exclusion d'un intervalle**

$|x - 1| > 3 \iff x < -2$ ou $x > 4$. En intersectant avec $[-4; 7]$:

$$S = [-4; -2[\cup]4; 7].$$

Exercice 20 – Approfondissement : ordre des opérations

1. $A \cup C =]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[.$
2. $(A \cup C) \cap B =]-1; 2] \cup [4; 6[.$
3. $B \cap C = [4; 6[.$
4. $A \cup (B \cap C) =]-\infty; 2] \cup [4; 6[.$
5. Le premier ensemble est strictement inclus dans le second. Par exemple, -2 appartient au second mais pas au premier. Les parenthèses changent donc le résultat.