Chapitre 4 – Corrigés

Généralités sur les fonctions

Solutions des exercices 1 à 20

Exercice 1 – Images

On remplace x par chaque valeur dans $3x + 2$:

$$f(0) = 2, \quad f(2) = 8, \quad f(-1) = -1, \quad f(5) = 17.$$

Exercice 2 – Images par une fonction carrée décalée

$$g(0) = -4, \quad g(2) = 0, \quad g(-2) = 0, \quad g(3) = 5.$$

Les opposés 2 et -2 ont la même image, car leurs carrés sont égaux.

Exercice 3 – Antécédents

On résout $2x + 5 = y$, donc $x = (y - 5)/2$. Pour $y = 7, 13, -3$, on obtient respectivement $\boxed{1, 4, -4}$.

Exercice 4 – Image ou antécédent

7 est **l'image** de 3 ; 3 est **un antécédent** de 7. De même, 5 est l'image de -2 ; -2 est un antécédent de 5. On dit « un » antécédent car plusieurs nombres peuvent avoir la même image.

Exercice 5 – Lecture d'un tableau

1. $f(-2) = 2$. 2. $f(1) = 0$. 3. Les antécédents visibles de 0 sont -1 et 1. 4. 2 est un antécédent de 3. 5. Aucun antécédent de 4 n'est visible : cela ne prouve pas qu'il n'en existe aucun hors des valeurs du tableau.

Exercice 6 – Appartenance à une courbe

Un point $(a; b)$ appartient à la courbe si $f(a) = b$. $f(0) = 3$: A oui ; $f(1) = 2$: B oui ; $f(2) = 3 \neq 5$: C non ; $f(-1) = 6$: D oui.

Exercice 7 – Ensembles de définition

Une expression polynomiale est définie sur $\mathbb{R}$; un dénominateur doit être non nul.

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Exercice 8 – Racine carrée

Le radicand doit être positif ou nul : $x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3$.

$$\boxed{D_f = [-3; +\infty[}.$$

Exercice 9 – Tableau de valeurs

Pour $f(x) = x^2 + 2x - 3$:

x	-3	-1	0	2
$f(x)$	0	-4	-3	5

Par exemple, $f(-3) = 9 - 6 - 3 = 0$ et $f(2) = 4 + 4 - 3 = 5$.

Exercice 10 – Antécédents par la fonction carré

0 a pour antécédent 0 ; 1 a -1 et 1 ; 9 a -3 et 3 ; 16 a -4 et 4. Aucun réel n'a pour carré -4.

Exercice 11 – Résoudre une égalité d'images

$3x - 4 = 5 \iff x = 3$. Puis $3x - 4 = -10 \iff 3x = -6 \iff x = -2$.

Exercice 12 – Tableau de variations

1. Décroissante sur $[-4; 1]$. 2. Croissante sur $[1; 6]$. 3. Le minimum est -3. 4. Il est atteint en $x = 1$. 5. Puisque $-3 < 0$ et que f est décroissante sur l'intervalle correspondant, $f(-3) \geq f(0)$. L'inégalité serait stricte si l'on précisait « strictement décroissante ».

Exercice 13 – Extrema

Le maximum est 9, atteint en -1. On peut aussi déterminer le minimum : sur le premier intervalle, les valeurs vont de 2 à 9 ; sur le second, de 9 à -3. Le minimum global est donc -3, atteint en 4.

Exercice 14 – Signe d'une fonction

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;4[$	4	$]4;+\infty[$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Les zéros sont placés aux bornes ; les signes sont exactement ceux donnés par l'énoncé.

Exercice 15 – Fonction et géométrie

$A(x) = x^2$. Pour un carré non dégénéré, le domaine pertinent est $]0; +\infty[$ (on peut inclure 0 si l'on autorise un carré dégénéré). $A(3) = 9$. L'antécédent positif de 25 est 5.

Exercice 16 – Approfondissement : plusieurs images

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	0	-1	0	3

0 et 4 ont la même image ; 1 et 3 aussi. $f(x) = 3 \iff x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0$, donc $S = \{0; 4\}$.

Exercice 17 – Approfondissement : quotient

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. $f(0) = -1/3$ et $f(1) = 3/(-2) = -3/2$. 3 n'a pas d'image. Pour chercher un antécédent de 1 : $2x + 1 = x - 3$, donc $x = -4$, autorisé. Vérification : $f(-4) = (-7)/(-7) = 1$.

Exercice 18 – Approfondissement : variations

x	-5		-1		3	7
$f(x)$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	-4	$\nearrow$ 3

Maximum : 6 en -1 ; minimum : -4 en 3. La décroissance entre -1 et 3 donne $f(0) \geq f(2)$; la croissance entre 3 et 7 donne $f(4) \leq f(6)$.

Exercice 19 – Approfondissement : carré et antécédents

$f(x) = 4 \iff x^2 = 9 : x = \pm 3$. $f(x) = 11 \iff x^2 = 16 : x = \pm 4$. $f(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{5}$. Enfin $f(x) < 0 \iff x^2 < 5 \iff \boxed{-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}}$.

Exercice 20 – Approfondissement : deux courbes

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	1	4	9
$g(x)$	1	3	5	7	9

Aucune des valeurs testées ne vérifie $f(x) > g(x)$.

$$f(x) = g(x) \iff x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0.$$

Les intersections sont $\boxed{(-1;1) \text{ et } (3;9)}$.