Chapitre 6 – Corrigés

Fonction carré

Solutions des exercices 1 à 20

Exercice 1 – Images

Pour $f(x) = x^2$, on obtient dans l'ordre $\boxed{0, 4, 9, 25, 49}$. Un nombre négatif élevé au carré donne un résultat positif : $(-3)^2 = 9$.

Exercice 2 – Tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Deux nombres opposés ont le même carré : $(-x)^2 = x^2$.

Exercice 3 – Images égales

L'image 9 est obtenue pour -3 et 3 ; 25 pour -5 et 5 ; 100 pour -10 et 10. Pour $a > 0$, les antécédents de a sont $\pm\sqrt{a}$.

Exercice 4 – Équations

Les ensembles solutions sont respectivement $\{-3; 3\}$, $\{-5; 5\}$, $\{-1; 1\}$, $\{0\}$. Il ne faut pas oublier la racine négative lorsque le second membre est positif.

Exercice 5 – Cas sans solution

Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$. Les équations $x^2 = -4$, $x^2 = -1$, $x^2 = -100$ ont donc toutes pour ensemble solution $\boxed{\varnothing}$.

Exercice 6 – Racines carrées

$$x^2 = 7 \Rightarrow S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}; \quad x^2 = 13 \Rightarrow S = \{-\sqrt{13}; \sqrt{13}\};$$
$$x^2 = 2 \Rightarrow S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

Exercice 7 – Comparer des carrés

$3^2 < 5^2$; $(-7)^2 > (-4)^2$; $(-6)^2 > 5^2$; $1{,}5^2 < 2^2$. On compare les valeurs absolues : plus la distance à 0 est grande, plus le carré est grand.

Exercice 8 – Variations sur les négatifs

$-8 < -5 \leq 0$ et la fonction carré est décroissante sur les négatifs, donc $(-8)^2 > (-5)^2$. De même, $-3{,}2 < -3$ implique $(-3{,}2)^2 > (-3)^2$.

Exercice 9 – Variations sur les positifs

$4{,}1 < 4{,}2$ donne $4{,}1^2 < 4{,}2^2$. Comme $\sqrt{5} > 2$, on a $(\sqrt{5})^2 > 2^2$ (autrement dit $5 > 4$).

Exercice 10 – Inéquations intérieures

Pour $a \geq 0$, $x^2 \leq a^2 \iff -a \leq x \leq a$. Les solutions sont $\boxed{[-4;4]}$, $\boxed{]-3;3[}$ et $\boxed{[-5;5]}$ respectivement.

Exercice 11 – Inéquations extérieures

$$x^2 \geq 9 \iff x \in]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[,$$
$$x^2 > 16 \iff x \in]-\infty;-4[\cup]4;+\infty[,$$
$$x^2 \geq 1 \iff x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[.$$

Exercice 12 – Tester des nombres

$x^2 \leq 25 \iff -5 \leq x \leq 5$. Parmi les nombres proposés, $-5, -3, 0, 4, 5$ sont solutions ; -6 et 7 ne le sont pas.

Exercice 13 – Appartenance à la parabole

$2^2 = 4$: A oui ; $(-3)^2 = 9$: B oui ; $4^2 = 16 \neq 15$: C non ; $(-5)^2 = 25$: D oui.

Exercice 14 – Aire d'un carré

$A(4) = 16$ cm^2 ; $A(7{,}5) = 56{,}25$ cm^2. Pour 36 cm^2, le côté vaut $\sqrt{36} = 6$ cm ; pour 80 cm^2, il vaut $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm $\approx 8{,}94$ cm. Une longueur est positive.

Exercice 15 – Encadrements

Sur les positifs, le carré conserve l'ordre : $2 < x < 3 \Rightarrow 4 < x^2 < 9$. Sur les négatifs, il inverse l'ordre : $-5 < x < -4 \Rightarrow 16 < x^2 < 25$.

Exercice 16 – Approfondissement : carré décalé

$(x-2)^2 = 25 \iff x - 2 = \pm 5$: $S = \{-3; 7\}$. $(x+3)^2 = 16 \iff x + 3 = \pm 4$: $S = \{-7; 1\}$.

Exercice 17 – Approfondissement : intervalle

$(x-1)^2 \leq 9 \iff -3 \leq x - 1 \leq 3 \iff -2 \leq x \leq 4$.

$$\boxed{S = [-2;4]}.$$

Exercice 18 – Approfondissement : deux demi-droites

$(x+2)^2 \geq 16 \iff x+2 \leq -4$ ou $x+2 \geq 4$. Ainsi $x \leq -6$ ou $x \geq 2$:

$$\boxed{S =]-\infty; -6] \cup [2; +\infty[}.$$

Exercice 19 – Approfondissement : intersection de courbes

$x^2 = 2x+3 \iff (x-3)(x+1) = 0$: les abscisses sont -1 et 3. Les intersections sont $(-1;1)$ et $(3;9)$. Le produit $(x-3)(x+1)$ est négatif entre ses racines, donc

$$x^2 \leq 2x+3 \iff \boxed{x \in [-1;3]}.$$

Exercice 20 – Approfondissement : rectangle

L'aire donne $x(x+4) = 45$, donc $x^2 + 4x - 45 = 0$.

$$x^2 + 4x - 45 = (x+9)(x-5).$$

Les solutions algébriques sont -9 et 5. On rejette -9, qui donnerait une largeur négative. La largeur est 5 et la longueur 9, dans l'unité de longueur de l'énoncé. Vérification : $5 \times 9 = 45$.