

Chapitre 7 – Corrigés

Fonction inverse

Solutions des exercices 1 à 20

Exercice 1 – Ensemble de définition

Le dénominateur ne doit pas être nul :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La division par zéro n'est pas définie.

Exercice 2 – Images

On prend l'inverse de chaque nombre :

$$f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2}, \quad f(-4) = -\frac{1}{4}, \quad f(1/5) = 5, \quad f(-2/3) = -\frac{3}{2}.$$

Exercice 3 – Tableau de valeurs

x	-4	-2	-1	$-1/2$	$1/2$	1	2	4
$1/x$	$-1/4$	$-1/2$	-1	-2	2	1	$1/2$	$1/4$

Chaque nombre multiplié par son inverse donne 1.

Exercice 4 – Antécédents

L'équation $1/x = a$, pour $a \neq 0$, donne $x = 1/a$. Les antécédents demandés sont $1/2, -1/4, 3, -5/2$.
Le nombre 0 n'a aucun antécédent : $1/x$ n'est jamais nul.

Exercice 5 – Symétrie

$f(3) = 1/3$ et $f(-3) = -1/3$; $f(5) = 1/5$ et $f(-5) = -1/5$. Pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = -f(x)$: la fonction est impaire et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Exercice 6 – Appartenance à la courbe

A oui : $1/2 = 1/2$; B oui : $1/(-4) = -1/4$; C non : $1/5 \neq 5$; D oui : $1/(1/3) = 3$.

Exercice 7 – Signe

Les signes sont respectivement négatif, positif, négatif, positif. Pour tout $x \neq 0$, $1/x$ est du même signe que x .

Exercice 8 – Inverses positifs

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{7} > \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{3,2} > \frac{1}{3,5}.$$

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 9 – Inverses négatifs

$-5 < -2 < 0$, donc $1/(-5) > 1/(-2)$; ainsi $1/(-2) < 1/(-5)$. $-7 < -3 < 0$ donne $1/(-7) > 1/(-3)$. La décroissance s'applique séparément sur $] -\infty; 0[$.

Exercice 10 – Équations

Les solutions sont, dans l'ordre,

$$x = \frac{1}{5}, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{4}{3}, \quad x = -\frac{7}{2}.$$

Toutes sont non nulles et appartiennent au domaine.

Exercice 11 – Équations avec inverses

$$1/x = 1/5 \Rightarrow x = 5 ; 1/x = 1/(-3) \Rightarrow x = -3 ; 2/x = 6 \Rightarrow 2 = 6x \Rightarrow x = 1/3.$$

Exercice 12 – Variations

$1/2 > 1/5$. Puisque $-8 < -3 < 0$, on a $1/(-8) > 1/(-3)$. Attention : la fonction n'est pas décroissante sur tout $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pris comme un seul intervalle.

Exercice 13 – Encadrements

$$2 < x < 4 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}} ;$$

$$-6 < x < -2 \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < -\frac{1}{6}}.$$

La décroissance inverse les bornes, sur chacun des deux intervalles.

Exercice 14 – Valeurs interdites

Pour A, $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$ interdit. Pour B, $x+5 = 0 \Rightarrow x = -5$ interdit. Pour C, $4x+8 = 0 \Rightarrow x = -2$ interdit.

Exercice 15 – Vitesse et temps

$t(60) = 2$ heures ; $t(80) = 1,5$ heure, soit 1 h 30 ; $t(120) = 1$ heure. Pour $v > 0$, $120/v$ est strictement décroissante : à distance fixée, si la vitesse moyenne augmente, le temps diminue.

Exercice 16 – Approfondissement : dénominateur décalé

$1/(x-2) = 3$ avec $x \neq 2$ donne $1 = 3(x-2)$, puis $x = 7/3$. $1/(x+4) = -2$ avec $x \neq -4$ donne $1 = -2(x+4)$, puis $x = -9/2$. Les deux valeurs sont autorisées.

Exercice 17 – Approfondissement : équation avec x

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Multiplier par x non nul est licite :

$$\frac{2}{x} = x \iff x^2 = 2 \iff \boxed{x = \pm\sqrt{2}}.$$

Exercice 18 – Approfondissement : inéquation quotient

$$\frac{1}{x} > 2 \iff \frac{1-2x}{x} > 0, \quad x \neq 0.$$

x	$] -\infty; 0[$	0	$]0; 1/2[$	$1/2$	$]1/2; +\infty[$
$1-2x$	+	+	+	0	–
x	–	0	+	+	+
$(1-2x)/x$	–	ND	+	0	–

Le quotient est strictement positif sur $\boxed{]0; 1/2[}$ seulement.

Exercice 19 – Approfondissement : signe d'un quotient

Valeur interdite : -2 ; zéro du numérateur : 3 .

x	$] -\infty; -2[$	-2	$] -2; 3[$	3	$]3; +\infty[$
$x-3$	–	–	–	0	+
$x+2$	–	0	+	+	+
$(x-3)/(x+2)$	+	ND	–	0	+

$$\boxed{S =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[}.$$

Exercice 20 – Approfondissement : deux courbes

Pour $x \neq 0$, $1/x = x-2 \iff 1 = x(x-2) \iff x^2 - 2x - 1 = 0$. On complète le carré : $(x-1)^2 = 2$, donc $x = 1 \pm \sqrt{2}$, toutes deux non nulles. En utilisant $y = x-2$, les intersections sont

$$\boxed{(1 - \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad (1 + \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})}.$$