

Chapitre 8 – Corrigés

Vecteurs

Solutions des exercices 1 à 20

Exercice 1 – Lire un vecteur

Le déplacement va de A vers B : origine A, extrémité B, notation $\overrightarrow{AB}$. L'ordre des lettres précise le sens du déplacement.

Exercice 2 – Vecteurs opposés

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \quad -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Un vecteur et son opposé ont la même direction et la même longueur, mais des sens contraires.

Exercice 3 – Égalité

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, les deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même longueur. Leurs points d'origine peuvent être différents.

Exercice 4 – Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}, \quad \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}.$$

On enchaîne deux déplacements en faisant correspondre l'arrivée du premier et le départ du second.

Exercice 5 – Simplifier

Par Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Exercice 6 – Coordonnées d'un vecteur

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 2; 7 - 1) = (3; 6), \quad \overrightarrow{BA} = (-3; -6).$$

On soustrait toujours les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité.

Exercice 7 – Coordonnées

$$\overrightarrow{CD} = (2 - (-3); -1 - 4) = \boxed{(5; -5)}.$$

Exercice 8 – Addition

On additionne coordonnée par coordonnée :

$$\vec{u} + \vec{v} = (3 + (-1); -2 + 5) = \boxed{(2; 3)}.$$

Exercice 9 – Multiplication par un réel

$$2\vec{u} = (4; -6), \quad -3\vec{u} = (-6; 9), \quad \frac{1}{2}\vec{u} = (1; -3/2).$$

Le réel multiplie les deux coordonnées.

Exercice 10 – Égalité et opposition

$\vec{u} = \vec{v}$ car leurs deux coordonnées coïncident. En revanche $\vec{w} = -\vec{u} = -\vec{v}$: il leur est opposé et n'est pas égal à ces vecteurs non nuls.

Exercice 11 – Milieu

$$I\left(\frac{-2+6}{2}; \frac{5+(-1)}{2}\right) = \boxed{I(2; 2)}.$$

Chaque coordonnée du milieu est la moyenne des coordonnées correspondantes.

Exercice 12 – Colinéarité

Premier couple : $\vec{v} = 2\vec{u}$, donc colinéaire. Second couple : $1 \times 7 - 4 \times 2 = -1 \neq 0$, donc non colinéaire.

Exercice 13 – Déterminant

$$3 \times 4 - (-2) \times (-6) = 12 - 12 = 0.$$

Les vecteurs sont colinéaires ; on peut aussi écrire $\vec{v} = -2\vec{u}$.

Exercice 14 – Alignement

$\overrightarrow{AB} = (2; 3)$ et $\overrightarrow{AC} = (4; 6) = 2\overrightarrow{AB}$. Ces vecteurs sont colinéaires : A, B, C sont alignés.

Exercice 15 – Parallélisme

$\overrightarrow{AB} = (3; 4)$ et $\overrightarrow{CD} = (3; 4)$ sont égaux, donc colinéaires et non nuls. Ainsi $(AB) \parallel (CD)$.

Exercice 16 – Approfondissement : retrouver un point

$\overrightarrow{AB} = (4; 3)$. La condition $\overrightarrow{DC} = (4; 3)$ impose $(8 - x_D; 1 - y_D) = (4; 3)$, donc $\boxed{D(4; -2)}$. Attention à l'ordre DC, différent de CD.

Exercice 17 – Approfondissement : double déplacement

$\overrightarrow{AB} = (3; 4)$, donc $\overrightarrow{AC} = (6; 8)$. On ajoute ce déplacement aux coordonnées de A : $C = (2+6; -1+8) = \boxed{(8; 7)}$.

Exercice 18 – Approfondissement : alignement

$\overrightarrow{AB} = (6; 4)$ et $\overrightarrow{AC} = (9; 6)$. $6 \times 6 - 4 \times 9 = 0$: les points sont alignés. De plus $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\boxed{k = 3/2}$.

Exercice 19 – Approfondissement : parallélogramme

Pour des sommets dans l'ordre ABCD, $D = A + C - B$.

$$D = (1 + 2 - 5; 1 + 6 - 3) = \boxed{(-2; 4)}.$$

Vérification : $\overrightarrow{AD} = (-3; 3) = \overrightarrow{BC}$.

Exercice 20 – Approfondissement : deux caractérisations

$\overrightarrow{AB} = (4; 3) = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = (6; -2) = \overrightarrow{BC}$. Donc ABCD est un parallélogramme. Milieu de $[AC]$: $(2; 5/2)$; milieu de $[BD]$: $(2; 5/2)$. Les diagonales ont le même milieu, ce qui confirme la conclusion.