
Quand le hasard devient un instrument de connaissance

Une découverte intuitive de la méthode de Monte-Carlo

Comprendre le réel par l'expérience, les probabilités et la répétition

Raphaël KWIATKOWSKI

Essai de vulgarisation scientifique

Introduction — Peut-on mesurer l'inconnu avec du hasard ?

Imaginez un lac dont les contours sont irréguliers. Vous possédez une image satellite et connaissez la surface du terrain photographié. Comment estimer la surface de l'eau sans dessiner patiemment chaque rive ? Ou imaginez que vous souhaitiez comprendre ce que pourrait valoir un investissement dans dix ans. Personne ne connaît son prix futur. Peut-on néanmoins explorer des futurs plausibles ?

Ces questions semblent différentes. Elles partagent pourtant une même idée : **remplacer un calcul difficile ou une incertitude complexe par une multitude d'expériences aléatoires simples**. C'est le cœur des méthodes de Monte-Carlo.

Le hasard, dans la vie ordinaire, est souvent synonyme de désordre. Ici, il devient un outil discipliné. Un tirage isolé ne nous apprend presque rien ; des milliers de tirages bien conçus peuvent révéler une proportion, une tendance, un ordre de grandeur ou une gamme de résultats possibles. Il ne s'agit pas de faire confiance à la chance, mais de comprendre ce que la répétition permet de découvrir.

1. Une idée simple : répéter pour approcher

Une simulation de Monte-Carlo suit généralement quatre gestes. On définit une question précise ; on décrit ce qui peut varier ; on tire au hasard de nombreuses situations possibles ; on observe la distribution des résultats. On peut alors estimer une moyenne, une proportion ou une probabilité.

Prenons un exemple élémentaire. Dans une boîte contenant des objets de deux couleurs, on peut estimer la proportion d'objets bleus en prélevant au hasard un grand nombre d'objets, avec remise. Chaque prélèvement est incertain ; la fréquence des objets bleus finit souvent par se stabiliser près de leur proportion réelle.

La raison profonde est la *loi des grands nombres* : sous des conditions appropriées, la moyenne de répétitions indépendantes d'une même expérience se rapproche de son espérance théorique. Cela ne garantit pas qu'une simulation particulière soit exacte. Cela explique pourquoi augmenter le nombre de tirages peut améliorer une estimation.

Point essentiel : Monte-Carlo ne transforme pas l'aléatoire en certitude. Il permet de quantifier certaines incertitudes, à condition que l'expérience simulée représente correctement le problème.

2. Mesurer un lac en faisant tomber des points

Revenons à l'image satellite. Dessinons autour du lac un rectangle dont la surface réelle est connue : supposons qu'il représente 2 km^2 . Nous choisissons alors deux coordonnées, une horizontale et une verticale, chacune tirée uniformément dans les limites du rectangle. « Uniformément » signifie ici qu'aucune zone de même surface n'est favorisée par rapport à une autre.

Chaque paire de coordonnées définit un point. On regarde s'il tombe sur l'eau ou sur la terre. Si 43 % des points tombent sur le lac, on estime que le lac occupe environ 43 % du rectangle, soit $0,86 \text{ km}^2$.

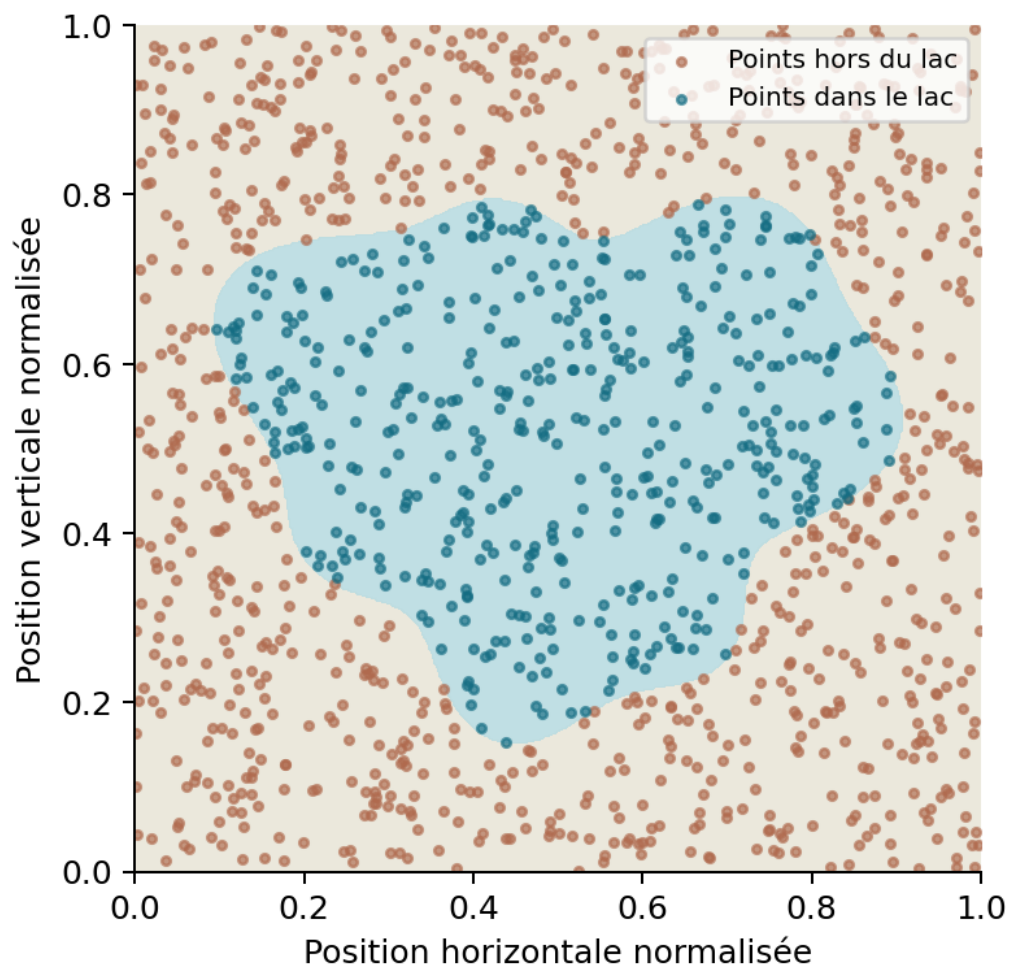


Figure 1 – Illustration originale : tirages uniformes dans un carré entourant un lac fictif. La proportion de points dans l’eau approche la fraction de surface occupée par le lac.

La formule est presque une phrase :

$$\text{Surface du lac} \approx \text{Surface du rectangle} \times \frac{\text{points dans le lac}}{\text{points tirés}}$$

Pourquoi cela fonctionne-t-il ? Parce qu'un point uniforme a une probabilité de tomber dans le lac égale à la part de surface qu'il occupe. Les fréquences observées approchent cette probabilité quand on répète l'expérience.

Il existe cependant des conditions concrètes. Le rectangle doit être correctement calibré ; les points doivent être répartis uniformément ; et il faut pouvoir décider de façon fiable si chaque point appartient au lac. Une image floue, des ombres ou une mauvaise délimitation des rives créent une erreur que des millions de tirages ne corrigeront pas.

3. Le nombre π au bout d'une pluie de points

On peut employer la même idée pour retrouver approximativement π . Dessinons un cercle de rayon 1 dans un carré de côté 2. La surface du carré est 4 ; celle du cercle est π . Si nous lançons des points uniformément dans le carré, la fraction qui tombe dans le cercle approche $\pi/4$.

Autrement dit, quatre fois cette proportion donne une estimation de π . L'exemple est célèbre parce qu'il rend visible une idée étonnante : **une constante géométrique peut être approchée par une expérience aléatoire.**

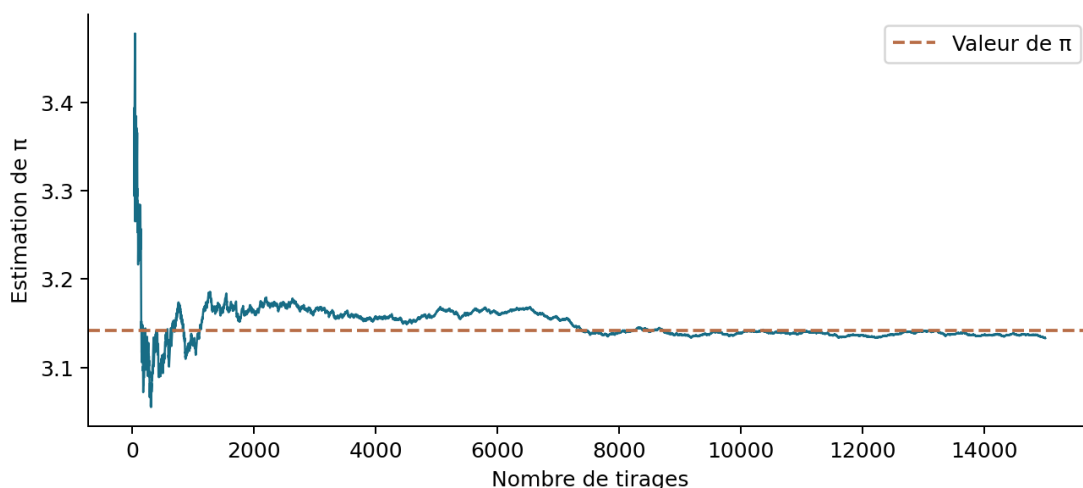


Figure 2 – Exemple d'une simulation : l'estimation de π fluctue puis se rapproche de la valeur de référence lorsque le nombre de points augmente.

La courbe ne descend pas tranquillement vers la vérité. Elle oscille, s'écarte parfois, puis tend à devenir plus stable. Le hasard produit du bruit ; l'accumulation des observations en atténue souvent l'importance relative.

4. Combien de tirages faut-il ?

Il serait tentant de croire que dix fois plus de tirages donnent dix fois plus de précision. En général, ce n'est pas le cas. Pour de nombreuses estimations Monte-Carlo classiques, l'erreur statistique typique diminue approximativement comme $1/\sqrt{N}$, où N est le nombre de tirages.

En pratique, cela signifie qu'il faut souvent **environ cent fois plus de simulations pour diviser l'erreur aléatoire par dix**. La méthode est puissante, mais elle n'est pas magique. Une estimation sérieuse doit préciser sa variabilité : par exemple, en donnant un intervalle de confiance lorsque les hypothèses nécessaires sont satisfaites.

Il faut aussi distinguer deux familles d'erreurs. *L'erreur d'échantillonnage* vient du nombre limité de tirages et peut diminuer avec davantage de simulations. *L'erreur de modèle* vient d'hypothèses inadaptées et peut persister même avec un milliard de tirages.

5. Explorer le prix futur d'un actif financier

Un cours de Bourse ne suit pas une trajectoire connue à l'avance. Plutôt que d'affirmer « cet actif vaudra 150 euros », une simulation peut construire plusieurs milliers de trajectoires sous des hypothèses explicites : niveau de départ, rendement moyen supposé, volatilité, horizon de temps et manière dont les variations s'enchaînent.

Chaque trajectoire raconte un futur *possible selon le modèle*, non une prédiction garantie. On peut ensuite poser des questions utiles : quelle part des scénarios finit sous le prix de départ ? Quelle est la médiane des prix simulés ? Quel éventail de résultats le modèle produit-il ?

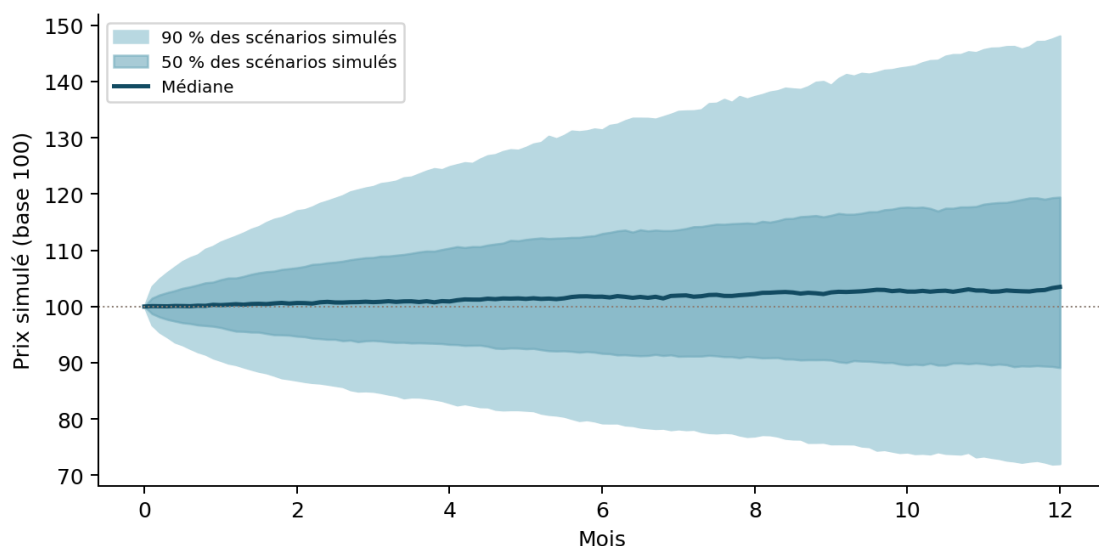


Figure 3 – Exemple pédagogique simulé : actif partant de 100, sur douze mois, selon un modèle simplifié à rendement et volatilité constants. Les bandes représentent les quantiles des scénarios simulés, et non des probabilités garanties du marché réel.

L'éventail s'élargit avec le temps : plus l'horizon est long, plus les chemins peuvent diverger. La bande large montre ici les 5e et 95e percentiles des simulations ; la

bande intérieure, les 25e et 75e percentiles. La ligne centrale est la médiane.

Mais attention à la confusion décisive : **une probabilité calculée par un modèle n'est pas nécessairement la probabilité réelle de l'événement**. Les marchés connaissent des crises, des ruptures, des changements de régime et des événements rares que des hypothèses simplifiées peuvent sous-estimer. Monte-Carlo aide à raisonner sur les risques ; il ne supprime ni l'incertitude ni le risque de perte. Ce graphique n'est pas un conseil d'investissement.

6. Bien au-delà de la finance : d'autres mondes à simuler

6.1 Préparer un chantier ou un projet

La durée de chaque étape d'un projet est incertaine. En tirant des durées plausibles pour les différentes tâches, puis en les combinant selon leurs dépendances, on obtient une distribution des dates d'achèvement. Cela aide à voir pourquoi une date unique, annoncée avec assurance, peut être trompeuse.

6.2 Comprendre une épidémie ou un phénomène naturel

On peut explorer l'effet d'hypothèses sur les contacts entre personnes, la transmission ou la durée d'une infection. Les simulations servent à comparer des scénarios ; elles ne remplacent pas les observations ni la validation du modèle.

6.3 Étudier la fiabilité d'un système

Dans un réseau électrique, une usine ou un satellite, chaque composant peut tomber en panne. En simulant les défaillances et leurs interactions, on peut estimer la fréquence de certains incidents et identifier les composants les plus critiques.

6.4 Explorer un problème physique difficile

Certaines quantités en physique, en chimie ou en ingénierie s'expriment comme des moyennes sur un très grand nombre de configurations. Les méthodes Monte-Carlo permettent d'échantillonner ces configurations au lieu de les parcourir toutes une par une.

7. Ce que Monte-Carlo nous apprend sur la connaissance

Il y a dans cette méthode une leçon presque philosophique. Nous aimerions connaître le monde sous la forme d'une réponse unique, exacte et définitive. Or beaucoup de problèmes résistent à cette ambition : contours irréguliers, systèmes complexes, futurs ouverts, interactions nombreuses.

Monte-Carlo propose une autre attitude intellectuelle : *ne pas prétendre abolir l'incertitude, mais apprendre à travailler avec elle*. On ne remplace pas l'ignorance par une certitude artificielle ; on la transforme, quand c'est possible, en estimation accompagnée de ses limites.

La méthode invite également à la modestie. Une simulation peut être extraordinairement précise dans l'univers qu'elle invente et profondément trompeuse sur le monde réel. Si les règles de départ sont fausses, les résultats les plus élégants restent fragiles. Il faut donc toujours demander : *qu'a-t-on supposé ? qu'a-t-on mesuré ? qu'est-ce qui pourrait invalider le modèle ?*

8. Un petit guide pour penser comme un expérimentateur

Face à une situation incertaine, commencez par formuler la grandeur que vous souhaitez estimer. Demandez-vous ensuite quelles variables sont réellement inconnues, et sur quelles données vous pouvez vous appuyer pour décrire leurs variations. Imaginez de nombreuses versions possibles de la situation, puis observez non seulement le résultat moyen, mais aussi les cas défavorables, les cas favorables et la dispersion.

Enfin, confrontez l'estimation au réel. Une bonne simulation est un instrument de réflexion, pas un oracle. Elle devient particulièrement utile lorsqu'elle aide à décider quelles informations supplémentaires il faudrait recueillir.

Conclusion — La puissance d'une incertitude bien comprise

Estimer la surface d'un lac à l'aide de points, approcher π ou explorer les futurs d'un investissement : ces expériences partagent une intuition remarquable. **La répétition d'événements simples et aléatoires peut nous renseigner sur des grandeurs difficiles à calculer directement.**

Le mérite de Monte-Carlo n'est pas de prédire tout ce qui arrivera. Il est de rendre certaines questions complexes plus accessibles, de rendre visibles des marges d'incertitude et de rappeler qu'une estimation doit toujours être lue à la lumière de ses hypothèses.

« Le hasard n'est pas ici le contraire de la méthode : il est la matière que la méthode organise. »

Pour aller plus loin — Repères et lectures

- Metropolis, N. et Ulam, S. (1949). « The Monte Carlo Method ». *Journal of the American Statistical Association*, 44(247), 335-341.
- Robert, C. P. et Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer.
- Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.
- Kroese, D. P., Taimre, T. et Botev, Z. I. (2011). *Handbook of Monte Carlo Methods*. Wiley.

Note sur les illustrations : les figures sont des simulations pédagogiques originales, réalisées à partir de tirages pseudo-aléatoires ; elles ne représentent ni un lac réel ni des prévisions de marché.