

Chapitre 1 – Ensembles de nombres et intervalles

Cours – Niveau Seconde

1 Les principaux ensembles de nombres

On utilise plusieurs ensembles de nombres.

Les nombres naturels

L'ensemble des nombres naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

Ce sont les nombres entiers positifs ou nuls.

Par exemple :

$$5 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad -2 \notin \mathbb{N}$$

Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Ainsi :

$$-7 \in \mathbb{Z}$$

Tous les nombres naturels sont des entiers relatifs :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Les nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{a}{b}$$

avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$.

Par exemple :

$$\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$$

mais également :

$$4 = \frac{4}{1} \in \mathbb{Q}$$

et

$$0,75 = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}.$$

Tous les entiers sont donc rationnels :

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Les nombres réels

L'ensemble de tous les nombres représentables sur une droite graduée est l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.

On y trouve notamment :

$$\sqrt{2}, \quad \pi, \quad \sqrt{5}.$$

Certains nombres réels ne sont pas rationnels.

Par exemple :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

mais

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

2 Appartenance et inclusion

Le symbole $\in$ signifie « appartient à ».

Par exemple :

$$3 \in \mathbb{N}.$$

Le symbole $\notin$ signifie « n'appartient pas à ».

Par exemple :

$$-5 \notin \mathbb{N}.$$

Le symbole $\subset$ est utilisé entre deux ensembles.

Par exemple :

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Attention à ne pas confondre :

$$3 \in \mathbb{N}$$

et

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

3 Les intervalles

Les intervalles permettent de représenter des ensembles de nombres réels.

Intervalle fermé

L'inégalité

$$a \leq x \leq b$$

s'écrit :

$$x \in [a; b].$$

Les nombres a et b appartiennent à l'intervalle.**Intervalle ouvert**

L'inégalité

$$a < x < b$$

s'écrit :

$$x \in]a; b[.$$

Les nombres a et b n'appartiennent pas à l'intervalle.**Intervalle semi-ouvert**

On a :

$$a \leq x < b \iff x \in [a; b[$$

et :

$$a < x \leq b \iff x \in]a; b].$$

Intervalle non borné

On a :

$$x \geq a \iff x \in [a; +\infty[$$

$$x > a \iff x \in]a; +\infty[$$

$$x \leq b \iff x \in]-\infty; b]$$

et :

$$x < b \iff x \in]-\infty; b[.$$

Attention : $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres.

Ils ne peuvent donc jamais appartenir à un intervalle.

4 Intersection de deux intervalles

L'intersection de deux ensembles A et B est notée :

$$A \cap B.$$

Elle contient les nombres appartenant à la fois à A et à B .

Par exemple, si :

$$A = [-2; 5]$$

et

$$B = [3; 8[$$

alors :

$$A \cap B = [3; 5].$$

5 Réunion de deux intervalles

La réunion de deux ensembles A et B est notée :

$$A \cup B.$$

Elle contient les nombres appartenant à A ou à B , éventuellement aux deux.

Avec :

$$A = [-2; 5] \quad \text{et} \quad B = [3; 8[$$

on obtient :

$$A \cup B = [-2; 8[.$$

6 Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel x , notée $|x|$, représente la distance entre x et 0.

Par exemple :

$$|5| = 5$$

et :

$$|-5| = 5.$$

La distance entre deux nombres réels a et b est :

$$|a - b|.$$

Par exemple, la distance entre -2 et 5 est :

$$|-2 - 5| = |-7| = 7.$$

7 Valeur absolue et intervalles

Soit $r \geq 0$.

La condition :

$$|x - a| \leq r$$

signifie que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r .

Ainsi :

$$\boxed{|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r]}.$$

De même :

$$\boxed{|x - a| < r \iff x \in]a - r; a + r[}.$$

Exemple

Résoudre :

$$|x - 3| \leq 5.$$

Cela signifie que la distance entre x et 3 est inférieure ou égale à 5.

Donc :

$$3 - 5 \leq x \leq 3 + 5.$$

Ainsi :

$$-2 \leq x \leq 8.$$

Finalement :

$$\boxed{x \in [-2; 8]}.$$

8 Méthodes à connaître

À la fin de ce chapitre, il faut savoir :

1. reconnaître les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$;
2. déterminer le plus petit ensemble contenant un nombre ;
3. utiliser correctement $\in$, $\notin$ et $\subset$;
4. passer d'une inégalité à un intervalle ;
5. passer d'un intervalle à une inégalité ;
6. représenter un intervalle sur une droite graduée ;
7. calculer une intersection ;
8. calculer une réunion ;
9. calculer une distance avec une valeur absolue ;
10. traduire une condition de distance par un intervalle.

À retenir

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Un crochet fermé signifie que la borne appartient à l'intervalle.

Un crochet ouvert signifie que la borne n'appartient pas à l'intervalle.

Enfin :

$$|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r].$$