

Chapitre 3 – Équations et inéquations

Cours – Niveau Seconde

1 Qu'est-ce qu'une équation ?

Une équation est une égalité contenant une ou plusieurs inconnues.

Par exemple :

$$3x + 5 = 17.$$

Résoudre une équation signifie déterminer toutes les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie.

2 Équations du premier degré

Considérons :

$$3x + 5 = 17.$$

On soustrait 5 aux deux membres :

$$3x = 12.$$

Puis on divise par 3 :

$$x = 4.$$

Ainsi :

$$S = \{4\}.$$

3 Règles de transformation

On peut :

- ajouter le même nombre aux deux membres ;
- soustraire le même nombre aux deux membres ;
- multiplier les deux membres par un même nombre non nul ;
- diviser les deux membres par un même nombre non nul.

Ces transformations ne changent pas les solutions.

Exemple

Résoudre :

$$5x - 7 = 2x + 8.$$

On regroupe les termes en x :

$$5x - 2x = 8 + 7.$$

Donc :

$$3x = 15.$$

Ainsi :

$$x = 5.$$

4 Équations avec parenthèses

Il faut souvent commencer par développer.

Exemple

Résoudre :

$$3(x + 2) = 2x + 7.$$

On développe :

$$3x + 6 = 2x + 7.$$

Donc :

$$x = 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = \{1\}}.$$

5 Équations produit nul

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

$$\boxed{AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0}$$

Exemple

Résoudre :

$$(x - 3)(2x + 5) = 0.$$

On résout :

$$x - 3 = 0$$

ou :

$$2x + 5 = 0.$$

Donc :

$$x = 3$$

ou :

$$x = -\frac{5}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{5}{2}; 3 \right\}}.$$

6 Équations avec quotient

Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul.

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0.$$

Exemple

Résoudre :

$$\frac{x-4}{x+2} = 0.$$

Il faut :

$$x - 4 = 0$$

et :

$$x + 2 \neq 0.$$

Donc :

$$x = 4.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = \{4\}}.$$

7 Qu'est-ce qu'une inéquation ?

Une inéquation est une comparaison contenant une inconnue.

Par exemple :

$$3x + 5 < 17.$$

Résoudre une inéquation signifie déterminer l'ensemble des valeurs de x qui rendent l'inégalité vraie.

8 Règles de résolution des inéquations

On peut ajouter ou soustraire le même nombre aux deux membres sans changer le sens de l'inégalité.

Par contre, lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif, il faut changer le sens de l'inégalité.

$$\boxed{a < b \implies -a > -b}$$

Exemple

Résoudre :

$$3x + 5 < 17.$$

On obtient :

$$3x < 12$$

puis :

$$x < 4.$$

Ainsi :

$$S =] - \infty; 4[.$$

Exemple avec un nombre négatif

Résoudre :

$$-2x + 3 \leq 9.$$

On soustrait 3 :

$$-2x \leq 6.$$

On divise par -2 et on change le sens :

$$x \geq -3.$$

Ainsi :

$$S = [-3; +\infty[.$$

9 Inéquations avec parenthèses

Exemple

Résoudre :

$$2(x + 3) > 5x - 6.$$

On développe :

$$2x + 6 > 5x - 6.$$

Donc :

$$12 > 3x.$$

Ainsi :

$$x < 4.$$

Donc :

$$S =] - \infty; 4[.$$

10 Tableaux de signes

Pour résoudre certaines inéquations comportant un produit, on étudie le signe des facteurs.

Exemple

Résoudre :

$$(x - 2)(x + 3) \geq 0.$$

Les deux facteurs s'annulent pour :

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = -3.$$

On construit le tableau de signes :

x	$-\infty$ $+\infty$	-3	2
$x + 3$		$-$	$+$
$+$			
$x - 2$		$-$	0
$+$			
$(x - 2)(x + 3)$		$+$	0
$+$			

Donc :

$$S =] - \infty; -3] \cup [2; +\infty[.$$

11 Méthodes à connaître

À la fin du chapitre, il faut savoir :

1. résoudre une équation du premier degré ;
2. résoudre une équation avec parenthèses ;
3. résoudre une équation produit nul ;
4. vérifier une solution ;
5. résoudre une inéquation du premier degré ;
6. penser à inverser le sens lorsqu'on divise par un nombre négatif ;
7. donner une solution sous forme d'intervalle ;
8. résoudre une inéquation produit simple avec un tableau de signes ;
9. traduire un problème en équation ou en inéquation.

À retenir

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

et :

diviser une inégalité par un nombre négatif inverse son sens