

Chapitre 4 – Généralités sur les fonctions

Cours – Niveau Seconde

1 Notion de fonction

Une fonction est un procédé qui, à un nombre x , associe un unique nombre.

On note souvent une fonction par une lettre comme f , g ou h .

Si la fonction f associe au nombre x le nombre $f(x)$, on écrit :

$$x \mapsto f(x).$$

Exemple

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x + 3.$$

Cela signifie qu'à chaque valeur de x , on associe le nombre :

$$2x + 3.$$

Par exemple :

$$f(4) = 2 \times 4 + 3 = 11.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(4) = 11}.$$

2 Image d'un nombre

Le nombre $f(x)$ est appelé l'image de x par la fonction f .

Par exemple, si :

$$f(x) = x^2 + 1,$$

alors l'image de 3 est :

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10.$$

On dit :

$$\boxed{10 \text{ est l'image de } 3 \text{ par } f}.$$

3 Antécédent d'un nombre

Un nombre x est un antécédent de y par f lorsque :

$$f(x) = y.$$

Exemple

On considère :

$$f(x) = 2x + 1.$$

Cherchons un antécédent de 7.

Il faut résoudre :

$$f(x) = 7.$$

Donc :

$$2x + 1 = 7.$$

Ainsi :

$$2x = 6$$

puis :

$$x = 3.$$

Donc :

3 est un antécédent de 7 .

4 Attention : image et antécédent

Une valeur de x possède une seule image par une fonction.

En revanche, un nombre peut :

- avoir aucun antécédent ;
- avoir un seul antécédent ;
- avoir plusieurs antécédents.

Par exemple, pour :

$$f(x) = x^2,$$

le nombre 4 possède deux antécédents :

$$-2 \quad \text{et} \quad 2.$$

En effet :

$$(-2)^2 = 4$$

et :

$$2^2 = 4.$$

5 Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des nombres pour lesquels $f(x)$ existe.

On le note souvent :

$$D_f.$$

Exemple

Pour :

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

on ne peut pas prendre :

$$x = 0.$$

Donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Autre exemple :

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

En Seconde, la racine carrée d'un réel négatif n'est pas définie.

Il faut donc :

$$x \geq 0.$$

Ainsi :

$$D_g = [0; +\infty[.$$

6 Fonction donnée par un tableau de valeurs

Une fonction peut être donnée par un tableau.

Par exemple :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

On peut lire :

$$f(-2) = 4$$

et :

$$f(1) = 1.$$

Les antécédents de 1 sont :

$$-1 \quad \text{et} \quad 1.$$

7 Courbe représentative

Dans un repère, la courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées :

$$(x; f(x)).$$

On la note souvent :

$$\mathcal{C}_f.$$

Un point $M(x; y)$ appartient à la courbe de f si et seulement si :

$$y = f(x).$$

Exemple

On considère :

$$f(x) = x^2.$$

Le point :

$$A(2; 4)$$

appartient à la courbe puisque :

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

En revanche :

$$B(2; 5)$$

n'appartient pas à la courbe.

8 Lire une image graphiquement

Pour déterminer graphiquement l'image d'un nombre a :

1. on part de a sur l'axe des abscisses ;
2. on rejoint verticalement la courbe ;
3. on lit l'ordonnée du point obtenu.

Cette ordonnée est :

$$f(a).$$

9 Lire les antécédents graphiquement

Pour rechercher les antécédents d'un nombre b :

1. on part de b sur l'axe des ordonnées ;
2. on trace mentalement la droite horizontale d'équation $y = b$;
3. on regarde ses points d'intersection avec la courbe ;
4. on lit les abscisses de ces points.

Ces abscisses sont les antécédents de b .

10 Résoudre une équation graphiquement

Résoudre :

$$f(x) = k$$

revient à rechercher les points d'intersection de la courbe de f avec la droite horizontale :

$$y = k.$$

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection.

11 Résoudre une inéquation graphiquement

Résoudre :

$$f(x) \geq k$$

revient à rechercher les endroits où la courbe de f est au-dessus ou sur la droite :

$$y = k.$$

De même :

$$f(x) \leq k$$

correspond aux endroits où la courbe est en dessous ou sur cette droite.

12 Variations d'une fonction

Une fonction peut être croissante ou décroissante sur un intervalle.

Fonction croissante

Une fonction f est croissante sur un intervalle lorsque, quand x augmente, $f(x)$ augmente également.
On peut retenir :

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

Fonction décroissante

Une fonction f est décroissante lorsque, quand x augmente, $f(x)$ diminue.
On peut retenir :

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

13 Tableau de variations

Les variations peuvent être résumées dans un tableau.

Par exemple, une fonction décroissante sur $[-3; 1]$ puis croissante sur $[1; 5]$ peut être représentée par :

x	-3	1	5
$f(x)$	7	$\searrow -2 \nearrow$	4

La fonction possède ici un minimum égal à :

$$-2.$$

Il est atteint pour :

$$x = 1.$$

14 Maximum et minimum

Une fonction possède un maximum M sur un intervalle si toutes ses valeurs sont inférieures ou égales à M .

Une fonction possède un minimum m si toutes ses valeurs sont supérieures ou égales à m .

Exemple

Si :

$$f(2) = -3$$

est la plus petite valeur prise par f , alors :

$$\boxed{-3 \text{ est le minimum de } f}.$$

Il est atteint en :

$$x = 2.$$

15 Signe d'une fonction

Étudier le signe de $f(x)$ consiste à déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

$$f(x) > 0,$$

$$f(x) = 0,$$

ou :

$$f(x) < 0.$$

Graphiquement :

- $f(x) > 0$ lorsque la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses ;
- $f(x) = 0$ aux points où la courbe coupe l'axe des abscisses ;
- $f(x) < 0$ lorsque la courbe est sous l'axe des abscisses.

16 Méthodes à connaître

À la fin du chapitre, il faut savoir :

1. calculer l'image d'un nombre ;
2. rechercher un antécédent ;
3. déterminer si un point appartient à une courbe ;
4. lire un tableau de valeurs ;
5. lire une image sur un graphique ;
6. lire les antécédents sur un graphique ;
7. résoudre graphiquement $f(x) = k$;
8. résoudre graphiquement $f(x) \leq k$ ou $f(x) \geq k$;
9. lire un tableau de variations ;
10. déterminer un maximum ou un minimum ;
11. étudier graphiquement le signe d'une fonction.

À retenir

$$\boxed{f(a) = b}$$

signifie à la fois :

- b est l'image de a ;
- a est un antécédent de b .

Et :

$$\boxed{M(x; y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x)}.$$