Chapitre 5 – Fonctions affines

Cours – Niveau Seconde

1 Définition

Une fonction affine est une fonction de la forme :

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

où a et b sont deux nombres réels.
Le nombre a est appelé le coefficient directeur.
Le nombre b est appelé l'ordonnée à l'origine.

Exemple

La fonction :

$$f(x) = 3x - 5$$

est affine avec :

$$a = 3 \qquad \text{et} \qquad b = -5.$$

2 Cas particuliers

Fonction linéaire

Si :

$$b = 0,$$

alors :

$$f(x) = ax.$$

On parle de fonction linéaire.
Par exemple :

$$f(x) = 4x.$$

Fonction constante

Si :

$$a = 0,$$

alors :

$$f(x) = b.$$

On parle de fonction constante.
Par exemple :

$$f(x) = 7.$$

3 Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Pour :

$$f(x) = ax + b,$$

la courbe représentative est une droite d'équation :

$$y = ax + b.$$

Ordonnée à l'origine

Le nombre b est l'image de 0 :

$$f(0) = b.$$

La droite coupe donc l'axe des ordonnées au point :

$$(0; b).$$

Coefficient directeur

Le coefficient directeur a mesure la variation de y lorsque x augmente.
Si on augmente x de 1, alors $f(x)$ varie de a.
Par exemple, si :

$$f(x) = 2x + 3,$$

alors une augmentation de 1 de x entraîne une augmentation de 2 de $f(x)$.

4 Sens de variation

Soit :

$$f(x) = ax + b.$$

- si $a > 0$, f est croissante ;
- si $a < 0$, f est décroissante ;
- si $a = 0$, f est constante.

On retient :

$$\boxed{a > 0 \Rightarrow f \text{ croissante}}$$

$$\boxed{a < 0 \Rightarrow f \text{ décroissante}}$$

5 Déterminer une image

Soit :

$$f(x) = 3x - 2.$$

Calculons l'image de 4 :

$$f(4) = 3 \times 4 - 2.$$

Donc :

$$f(4) = 10.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(4) = 10}.$$

6 Déterminer un antécédent

On considère :

$$f(x) = 2x + 5.$$

Cherchons l'antécédent de 11.
Il faut résoudre :

$$2x + 5 = 11.$$

Donc :

$$2x = 6$$

puis :

$$x = 3.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{3 est un antécédent de 11}}.$$

7 Construire la droite d'une fonction affine

Pour tracer la droite représentant :

$$f(x) = 2x + 1,$$

on peut calculer deux images.
Par exemple :

$$f(0) = 1$$

et :

$$f(2) = 5.$$

La droite passe donc par :

$$A(0; 1)$$

et :

$$B(2; 5).$$

Deux points suffisent pour tracer une droite.

8 Déterminer l'expression d'une fonction affine

On suppose que :

$$f(x) = ax + b.$$

Si on connaît deux points de la droite, on peut retrouver a et b.
Supposons que la droite passe par :

$$A(x_A; y_A)$$

et :

$$B(x_B; y_B),$$

avec :

$$x_A \neq x_B.$$

Alors :

$$\boxed{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}.$$

Une fois a connu, on utilise l'un des points pour trouver b.

Exemple

Une droite passe par :

$$A(1; 3)$$

et :

$$B(4; 9).$$

Alors :

$$a = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Donc :

$$f(x) = 2x + b.$$

Comme :

$$f(1) = 3,$$

on obtient :

$$2 + b = 3.$$

Donc :

$$b = 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(x) = 2x + 1}.$$

9 Signe d'une fonction affine

On considère :

$$f(x) = ax + b.$$

Pour étudier son signe, on commence par chercher son zéro.
Il faut résoudre :

$$ax + b = 0.$$

Si :

$$a \neq 0,$$

alors :

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}.$$

Exemple

Soit :

$$f(x) = 2x - 6.$$

On cherche :

$$2x - 6 = 0.$$

Donc :

$$x = 3.$$

Comme $a = 2 > 0$, f est croissante.
Ainsi :

$$f(x) < 0$$

pour :

$$x < 3$$

et :

$$f(x) > 0$$

pour :

$$x > 3.$$

On peut résumer :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

10 Comparer deux fonctions affines

Soient :

$$f(x) = 2x + 1$$

et :

$$g(x) = -x + 7.$$

Pour chercher les abscisses où les deux courbes se coupent, on résout :

$$f(x) = g(x).$$

Donc :

$$2x + 1 = -x + 7.$$

Ainsi :

$$3x = 6$$

puis :

$$x = 2.$$

L'ordonnée correspondante est :

$$f(2) = 5.$$

Les deux droites se coupent donc en :

$$\boxed{(2; 5)}.$$

11 Modéliser une situation

Les fonctions affines sont très utilisées pour modéliser des situations concrètes.
Par exemple, un abonnement coûte 10 euros puis 4 euros par séance.
Si x désigne le nombre de séances, le prix total est :

$$P(x) = 4x + 10.$$

Il s'agit d'une fonction affine.

12 Méthodes à connaître

À la fin du chapitre, il faut savoir :

1. reconnaître une fonction affine ;
2. identifier a et b ;
3. calculer une image ;
4. déterminer un antécédent ;
5. déterminer le sens de variation à partir de a ;
6. tracer une droite représentant une fonction affine ;
7. déterminer une fonction affine à partir de deux points ;
8. calculer un coefficient directeur ;

9. étudier le signe d'une fonction affine ;
10. résoudre $f(x) = g(x)$ pour deux fonctions affines ;
11. modéliser une situation concrète.

À retenir

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

$$\boxed{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

et :

$$\boxed{\begin{cases} a > 0 & \Rightarrow f \text{ croissante} \\ a < 0 & \Rightarrow f \text{ décroissante} \end{cases}}$$