

Chapitre 6 – Fonction carré

Cours – Niveau Seconde

1 Définition

La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

Son ensemble de définition est :

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2 Calculer une image

Pour calculer l'image d'un nombre, on élève ce nombre au carré.

Par exemple :

$$f(3) = 3^2 = 9.$$

De même :

$$f(-4) = (-4)^2 = 16.$$

Ainsi :

$$f(3) = 9$$

et :

$$f(-4) = 16.$$

3 Propriété de symétrie

Pour tout réel x :

$$(-x)^2 = x^2.$$

Donc :

$$f(-x) = f(x).$$

Deux nombres opposés ont la même image par la fonction carré.

Par exemple :

$$f(5) = 25$$

et :

$$f(-5) = 25.$$

La fonction carré est dite **paire**.

4 Tableau de valeurs

On peut construire le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

On observe une symétrie autour de 0.

5 Représentation graphique

La courbe représentative de la fonction :

$$f(x) = x^2$$

est appelée une **parabole**.

Elle possède un axe de symétrie : l'axe des ordonnées.

Elle passe notamment par :

$$(0; 0), \quad (1; 1), \quad (-1; 1),$$

$$(2; 4), \quad (-2; 4).$$

Le point :

$$O(0; 0)$$

est le sommet de la parabole.

6 Variations de la fonction carré

La fonction carré n'est pas monotone sur tout $\mathbb{R}$.

Elle est :

- décroissante sur $] -\infty; 0]$;
- croissante sur $[0; +\infty[$.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

Le minimum de la fonction carré est :

$$\boxed{0}.$$

Il est atteint pour :

$$\boxed{x = 0}.$$

7 Comparer des carrés

Cas des nombres positifs

Si :

$$0 \leq a \leq b,$$

alors :

$$a^2 \leq b^2.$$

Par exemple :

$$3 < 5$$

donc :

$$3^2 < 5^2.$$

Cas des nombres négatifs

Sur les nombres négatifs, l'ordre est inversé par la fonction carré.

Par exemple :

$$-5 < -3$$

mais :

$$(-5)^2 > (-3)^2.$$

En effet :

$$25 > 9.$$

8 Résoudre $x^2 = a$

On distingue plusieurs cas.

Si $a > 0$

L'équation :

$$x^2 = a$$

possède deux solutions :

$$x = -\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a}.$$

Par exemple :

$$x^2 = 16$$

donne :

$$x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 4.$$

Si $a = 0$

$$x^2 = 0$$

possède une seule solution :

$$\boxed{x = 0}.$$

Si $a < 0$

Un carré est toujours positif ou nul.

Donc :

$$x^2 = -5$$

n'a aucune solution réelle.

Ainsi :

$$\boxed{S = \emptyset}.$$

9 Résoudre $x^2 \leq a$

Si $a > 0$, alors :

$$x^2 \leq a$$

équivalent à :

$$-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}.$$

Donc :

$$\boxed{x^2 \leq a \iff x \in [-\sqrt{a}; \sqrt{a}]}.$$

Exemple

Résoudre :

$$x^2 \leq 9.$$

On obtient :

$$-3 \leq x \leq 3.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = [-3; 3]}.$$

10 Résoudre $x^2 \geq a$

Si $a > 0$, alors :

$$x^2 \geq a$$

équivalent à :

$$x \leq -\sqrt{a}$$

ou :

$$x \geq \sqrt{a}.$$

Ainsi :

$$x^2 \geq a \iff x \in]-\infty; -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}; +\infty[.$$

Exemple

Résoudre :

$$x^2 \geq 16.$$

On obtient :

$$x \leq -4$$

ou :

$$x \geq 4.$$

Donc :

$$S =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[.$$

11 Résoudre graphiquement

Résoudre :

$$x^2 = k$$

revient à chercher les intersections entre la parabole :

$$y = x^2$$

et la droite horizontale :

$$y = k.$$

Selon la valeur de k :

- si $k > 0$, il y a deux intersections ;
- si $k = 0$, il y en a une ;
- si $k < 0$, il n'y en a aucune.

12 Lien avec la distance

L'inéquation :

$$x^2 \leq a^2$$

avec $a \geq 0$ équivaut à :

$$|x| \leq a.$$

Donc :

$$x^2 \leq a^2 \iff |x| \leq a.$$

13 Méthodes à connaître

À la fin du chapitre, il faut savoir :

1. calculer l'image d'un nombre par la fonction carré ;
2. utiliser la propriété $(-x)^2 = x^2$;
3. lire et construire un tableau de valeurs ;
4. connaître l'allure de la parabole ;
5. connaître les variations de la fonction carré ;
6. comparer des carrés ;
7. résoudre une équation de la forme $x^2 = a$;
8. résoudre une inéquation de la forme $x^2 \leq a$;
9. résoudre une inéquation de la forme $x^2 \geq a$;
10. utiliser la fonction carré dans un problème.

À retenir

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$x^2 \geq 0$$

$$x^2 = a \iff x = -\sqrt{a} \text{ ou } x = \sqrt{a} \quad \text{si } a > 0$$

et :

$$x^2 \leq a^2 \iff -a \leq x \leq a \quad \text{si } a \geq 0.$$