

Chapitre 7 – Fonction inverse

Cours – Niveau Seconde

1 Définition

La fonction inverse est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Elle n'est pas définie pour :

$$x = 0.$$

Son ensemble de définition est donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ou encore :

$$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[.$$

2 Calculer une image

Pour calculer l'image d'un nombre non nul x , on prend son inverse.

Par exemple :

$$f(2) = \frac{1}{2}.$$

$$f(-4) = -\frac{1}{4}.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3.$$

3 Antécédents

Chercher un antécédent de a revient à résoudre :

$$\frac{1}{x} = a.$$

Si :

$$a \neq 0,$$

alors :

$$x = \frac{1}{a}.$$

Par exemple, l'antécédent de 5 est :

$$\frac{1}{5}.$$

Le nombre 0 ne possède aucun antécédent par la fonction inverse.

En effet :

$$\frac{1}{x} \neq 0$$

pour tout réel non nul x .

4 Propriété de symétrie

Pour tout réel non nul x :

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}.$$

Donc :

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}.$$

La fonction inverse est dite **impaire**.

Sa courbe possède une symétrie centrale de centre l'origine du repère.

5 Tableau de valeurs

On peut compléter :

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

6 Représentation graphique

La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole**.

Elle possède deux branches :

- une dans le premier quadrant ;
- une dans le troisième quadrant.

La courbe ne coupe jamais :

- l'axe des abscisses ;
- l'axe des ordonnées.

7 Asymptotes

Lorsque x se rapproche de 0, la valeur de :

$$\frac{1}{x}$$

devient très grande en valeur absolue.

Lorsque x devient très grand en valeur absolue :

$$\frac{1}{x}$$

se rapproche de 0.

Les axes du repère jouent donc un rôle particulier pour la courbe.

8 Variations

La fonction inverse est décroissante sur :

$$]-\infty; 0[$$

et également décroissante sur :

$$]0; +\infty[.$$

Son tableau de variations peut être résumé par :

x	$-\infty$	0	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 0$

Attention : on ne peut pas dire qu'elle est décroissante sur tout son ensemble de définition, car celui-ci est composé de deux intervalles séparés.

9 Signe

Si :

$$x > 0,$$

alors :

$$\frac{1}{x} > 0.$$

Si :

$$x < 0,$$

alors :

$$\frac{1}{x} < 0.$$

Donc la fonction inverse a le même signe que x .

On peut écrire :

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-$	non défini	$+$

10 Comparer des inverses

Sur :

$$]0; +\infty[,$$

la fonction inverse est décroissante.

Donc si :

$$0 < a < b,$$

alors :

$$\boxed{\frac{1}{a} > \frac{1}{b}}.$$

Par exemple :

$$2 < 5$$

donc :

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{5}.$$

Sur :

$$]-\infty; 0[,$$

la fonction inverse est aussi décroissante.

Ainsi, si :

$$a < b < 0,$$

alors :

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

11 Résoudre une équation

Résoudre :

$$\frac{1}{x} = 4.$$

On obtient :

$$x = \frac{1}{4}.$$

Ainsi :

$$S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}.$$

Autre exemple :

$$\frac{1}{x} = -3.$$

Donc :

$$x = -\frac{1}{3}.$$

12 Résoudre une équation du type $\frac{1}{x} = \frac{1}{a}$

Si :

$$x \neq 0$$

et :

$$a \neq 0,$$

alors :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

implique :

$$\boxed{x = a}.$$

13 Résoudre une inéquation

Considérons :

$$\frac{1}{x} > 2.$$

Une méthode consiste à tout ramener dans un seul membre :

$$\frac{1}{x} - 2 > 0.$$

Donc :

$$\frac{1 - 2x}{x} > 0.$$

Il faut ensuite étudier le signe du quotient.

Les valeurs importantes sont :

$$x = 0$$

et :

$$1 - 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

On obtient alors :

$$\boxed{S =]0; \frac{1}{2}[}.$$

14 Lien avec les quotients

Le chapitre sur la fonction inverse permet aussi de mieux comprendre les expressions de la forme :

$$\frac{A(x)}{B(x)}.$$

Il faut toujours penser à exclure les valeurs qui annulent le dénominateur.

Par exemple :

$$\frac{x + 1}{x - 3}$$

n'est pas défini pour :

$$x = 3.$$

15 Méthodes à connaître

À la fin du chapitre, il faut savoir :

1. connaître l'expression de la fonction inverse ;
2. connaître son ensemble de définition ;
3. calculer des images ;

4. déterminer des antécédents ;

5. connaître la propriété :

$$f(-x) = -f(x);$$

6. reconnaître l'allure de l'hyperbole ;

7. connaître les variations ;

8. connaître le signe de $\frac{1}{x}$;

9. comparer des inverses ;

10. résoudre des équations simples contenant $\frac{1}{x}$;

11. résoudre certaines inéquations avec un quotient.

À retenir

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

et :

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0.$$