

Chapitre 8 – Vecteurs

Cours – Niveau Seconde

1 Notion de vecteur

Un vecteur représente un déplacement.

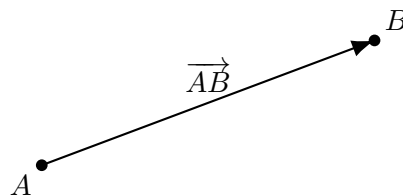
Le vecteur allant du point A vers le point B est noté :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}}.$$

Il possède trois caractéristiques :

- une direction ;
- un sens ;
- une longueur.

Schéma



2 Égalité de deux vecteurs

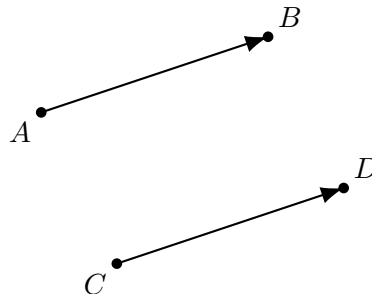
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :

- la même direction ;
- le même sens ;
- la même longueur.

On écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}.$$

Schéma



Ici :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}.$$

3 Vecteur nul

Le vecteur :

$$\overrightarrow{AA}$$

est appelé vecteur nul.

On le note :

$$\boxed{\vec{0}}.$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{AA} = \vec{0}}.$$

4 Vecteurs opposés

Les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}$$

et :

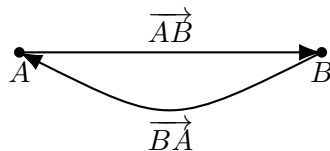
$$\overrightarrow{BA}$$

ont la même direction et la même longueur, mais des sens opposés.

Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}.$$

Schéma



5 Translation et vecteur

Une translation transforme un point A en un point B .

Le déplacement est représenté par :

$$\overrightarrow{AB}.$$

Si une translation transforme :

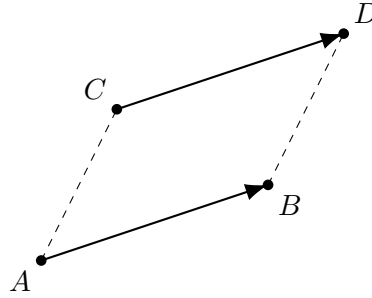
$$A \longmapsto B$$

et :

$$C \longmapsto D,$$

alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}.$$

Schéma**6 Somme de deux vecteurs**

Pour additionner deux vecteurs, on peut les mettre bout à bout.
Si :

$$\overrightarrow{AB}$$

est suivi de :

$$\overrightarrow{BC},$$

alors :

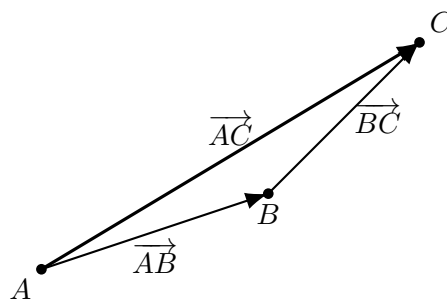
$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}.$$

Cette propriété est appelée **relation de Chasles**.

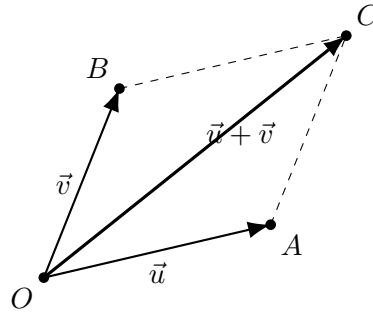
7 Relation de Chasles

Pour tous points A , B et C :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}.$$

Schéma**8 Règle du parallélogramme**

Si deux vecteurs ont la même origine, leur somme peut être obtenue comme la diagonale d'un parallélogramme.

Schéma**9 Multiplication d'un vecteur par un réel**

Soit un vecteur $\vec{u}$ et un réel k .

Le vecteur :

$$k\vec{u}$$

a :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le même sens si $k > 0$;
- le sens opposé si $k < 0$;
- une longueur multipliée par $|k|$.

Par exemple :

$$2\vec{u}$$

est deux fois plus long que $\vec{u}$.

$$-\vec{u}$$

a la même longueur mais un sens opposé.

10 Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère, si :

$$A(x_A; y_A)$$

et :

$$B(x_B; y_B),$$

alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}.$$

Exemple

Soit :

$$A(2; 1)$$

et :

$$B(5; 4).$$

Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

11 Égalité de vecteurs avec les coordonnées

Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

Si :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

alors :

$$\boxed{\vec{u} = \vec{v} \iff x = x' \text{ et } y = y'}.$$

12 Somme de vecteurs avec les coordonnées

Si :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

alors :

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}}.$$

13 Multiplication par un réel avec les coordonnées

Si :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

alors :

$$\boxed{k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}}.$$

14 Milieu d'un segment

Si :

$$A(x_A; y_A)$$

et :

$$B(x_B; y_B),$$

le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

15 Colinéarité

Deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. Cela signifie qu'il existe un réel k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

Critère avec les coordonnées

Soient :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Ils sont colinéaires si :

$$xy' - yx' = 0.$$

Exemple

Soit :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On remarque que :

$$\vec{v} = 2\vec{u}.$$

Donc les vecteurs sont colinéaires.

16 Alignement de points

Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si :

$$\overrightarrow{AB}$$

et :

$$\overrightarrow{AC}$$

sont colinéaires.

Ainsi, pour vérifier un alignement :

1. on calcule $\overrightarrow{AB}$;
2. on calcule $\overrightarrow{AC}$;
3. on teste la colinéarité.

17 Parallélisme

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si :

$$\overrightarrow{AB}$$

et :

$$\overrightarrow{CD}$$

sont colinéaires.

18 Méthodes à connaître

À la fin du chapitre, il faut savoir :

1. reconnaître un vecteur ;
2. utiliser l'égalité de vecteurs ;
3. utiliser la relation de Chasles ;
4. construire une somme de vecteurs ;
5. multiplier un vecteur par un réel ;
6. calculer les coordonnées d'un vecteur ;
7. additionner des vecteurs par leurs coordonnées ;
8. calculer un milieu ;
9. tester la colinéarité ;
10. démontrer un alignement ;
11. démontrer un parallélisme.

À retenir

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$$

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

et :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ colinéaires } \iff xy' - yx' = 0.$$