Chapitre 10 – Droites et équations de droites

Cours – Niveau Seconde

1 Équation réduite d'une droite

Dans un repère, une droite non verticale peut être décrite par une équation de la forme :

$$\boxed{y = mx + p}$$

où :

- m est le coefficient directeur ;
- p est l'ordonnée à l'origine.

Exemple

La droite :

$$y = 2x + 3$$

a pour :

$$m = 2 \qquad \text{et} \qquad p = 3.$$

2 Ordonnée à l'origine

Dans :

$$y = mx + p,$$

si :

$$x = 0,$$

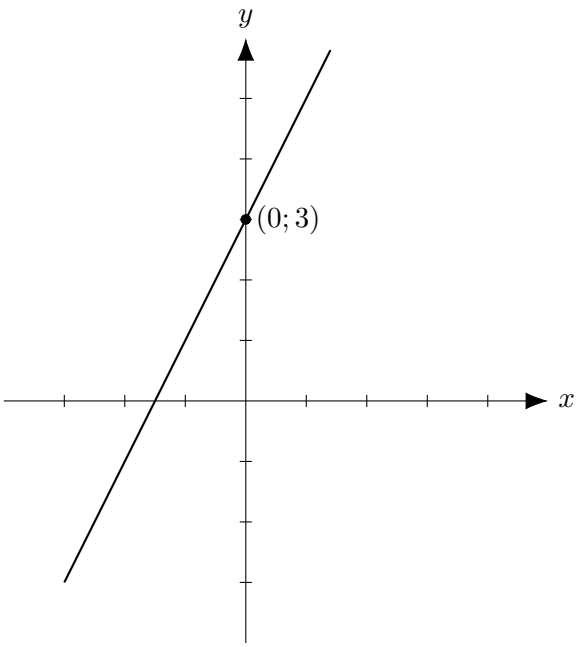
alors :

$$y = p.$$

La droite coupe donc l'axe des ordonnées au point :

$$\boxed{(0; p)}.$$

Schéma



3 Coefficient directeur

Le coefficient directeur indique la pente de la droite.
Si la droite passe par :

$$A(x_A; y_A)$$

et :

$$B(x_B; y_B),$$

avec :

$$x_A \neq x_B,$$

alors :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}.$$

On peut aussi écrire :

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Exemple

Avec :

$$A(1; 2)$$

et :

$$B(4; 8),$$

on obtient :

$$m = \frac{8-2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2.$$

4 Interprétation graphique du coefficient directeur

Si :

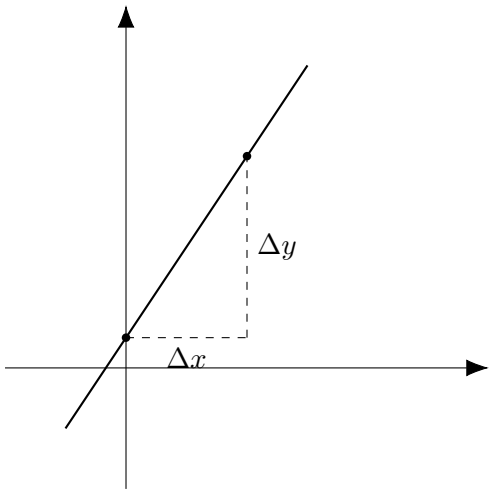
$$m = 2,$$

alors lorsque l'on avance de 1 unité horizontalement, on monte de 2 unités.
Si :

$$m = -3,$$

alors lorsque l'on avance de 1 unité, on descend de 3 unités.

Schéma



5 Sens de variation

Pour une droite :

$$y = mx + p,$$

on a :

- si $m > 0$, la droite monte de gauche à droite ;
- si $m < 0$, la droite descend de gauche à droite ;
- si $m = 0$, la droite est horizontale.

6 Droite horizontale

Une droite horizontale a une équation de la forme :

$$\boxed{y = k}.$$

Par exemple :

$$y = 4.$$

Tous les points de cette droite ont pour ordonnée 4.

7 Droite verticale

Une droite verticale ne peut pas être écrite sous la forme :

$$y = mx + p.$$

Elle possède une équation de la forme :

$$\boxed{x = k}.$$

Par exemple :

$$x = 3.$$

Tous ses points ont pour abscisse 3.

8 Vérifier qu'un point appartient à une droite

Un point :

$$A(x_A; y_A)$$

appartient à la droite :

$$y = mx + p$$

si et seulement si :

$$\boxed{y_A = mx_A + p}.$$

Exemple

La droite est :

$$d : y = 2x + 1.$$

Le point :

$$A(3; 7)$$

appartient-il à d ?
On calcule :

$$2 \times 3 + 1 = 7.$$

Donc :

$$\boxed{A \in d}.$$

9 Déterminer une équation avec un point et un coefficient directeur

On connaît :

$$m = 3$$

et le point :

$$A(2; 5).$$

On cherche :

$$y = 3x + p.$$

Comme A appartient à la droite :

$$5 = 3 \times 2 + p.$$

Donc :

$$p = -1.$$

Ainsi :

$$\boxed{y = 3x - 1}.$$

10 Déterminer une équation avec deux points

On connaît :

$$A(1; 3)$$

et :

$$B(5; 11).$$

On commence par calculer :

$$m = \frac{11 - 3}{5 - 1} = 2.$$

La droite est donc :

$$y = 2x + p.$$

Comme elle passe par A :

$$3 = 2 \times 1 + p.$$

Donc :

$$p = 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{y = 2x + 1}.$$

11 Vecteur directeur

Pour une droite :

$$y = mx + p,$$

un vecteur directeur peut être :

$$\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}}.$$

Plus généralement, tout vecteur non nul colinéaire à celui-ci est un vecteur directeur de la droite.

Exemple

Pour :

$$y = 3x - 2,$$

un vecteur directeur est :

$$\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

On pourrait aussi choisir :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

12 Parallélisme de deux droites

Deux droites non verticales :

$$d_1 : y = m_1 x + p_1$$

et :

$$d_2 : y = m_2 x + p_2$$

sont parallèles si et seulement si :

$$\boxed{m_1 = m_2}.$$

Si en plus :

$$p_1 \neq p_2,$$

elles sont parallèles distinctes.

Exemple

$$d_1 : y = 2x + 3$$

et :

$$d_2 : y = 2x - 5$$

sont parallèles.

13 Intersection de deux droites

Pour déterminer le point d'intersection de :

$$d_1 : y = m_1 x + p_1$$

et :

$$d_2 : y = m_2 x + p_2,$$

on résout :

$$m_1 x + p_1 = m_2 x + p_2.$$

Puis on calcule l'ordonnée.

Exemple

$$d_1 : y = 2x + 1$$

et :

$$d_2 : y = -x + 7.$$

On résout :

$$2x + 1 = -x + 7.$$

Donc :

$$3x = 6$$

et :

$$x = 2.$$

Alors :

$$y = 2 \times 2 + 1 = 5.$$

Les droites se coupent en :

$$\boxed{I(2;5)}.$$

14 Équation cartésienne

Une droite peut également être décrite par une équation de la forme :

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

où a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Exemple

$$2x - y + 3 = 0$$

équivaut à :

$$y = 2x + 3.$$

15 Passer d'une forme cartésienne à une forme réduite

Considérons :

$$3x + 2y - 6 = 0.$$

On isole y :

$$2y = -3x + 6.$$

Donc :

$$y = -\frac{3}{2}x + 3.$$

Ainsi :

$$\boxed{m = -\frac{3}{2}}$$

et :

$$\boxed{p = 3}.$$

16 Vecteur directeur et équation cartésienne

Pour une droite d'équation :

$$ax + by + c = 0,$$

un vecteur directeur possible est :

$$\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}.$$

Par exemple, pour :

$$2x + 3y - 5 = 0,$$

un vecteur directeur est :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

17 Méthodes à connaître

À la fin du chapitre, il faut savoir :

1. reconnaître une équation réduite ;
2. identifier le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine ;
3. calculer un coefficient directeur ;
4. tracer une droite ;
5. reconnaître une droite horizontale ou verticale ;
6. vérifier qu'un point appartient à une droite ;
7. déterminer une équation avec un point et une pente ;
8. déterminer une équation avec deux points ;
9. déterminer un vecteur directeur ;
10. reconnaître deux droites parallèles ;
11. déterminer un point d'intersection ;
12. passer d'une équation cartésienne à une équation réduite.

À retenir

$$\boxed{y = mx + p}$$

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

$$\boxed{x = k \text{ pour une droite verticale}}$$

et :

$$\boxed{d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2}$$

pour deux droites non verticales.