Chapitre 11 – Systèmes d'équations

Cours – Niveau Seconde

1 Définition

Un système de deux équations à deux inconnues est de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}}$$

où x et y sont les inconnues.
Résoudre le système signifie trouver les couples :

$$(x; y)$$

qui vérifient simultanément les deux équations.

2 Exemple simple

Considérons :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

On cherche un couple $(x; y)$ satisfaisant les deux égalités.
La solution est :

$$x = 4 \qquad \text{et} \qquad y = 3.$$

On peut écrire :

$$\boxed{S = \{(4; 3)\}}.$$

3 Vérifier une solution

Pour vérifier que :

$$(x; y) = (4; 3)$$

est solution de :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

on remplace :

$$4 + 3 = 7$$

et :

$$4 - 3 = 1.$$

Les deux égalités sont vraies.
Donc :

$$\boxed{(4; 3) \text{ est solution}}.$$

4 Méthode par substitution

La substitution consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre, puis à remplacer dans la seconde équation.

Exemple

Résoudre :

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

La première équation donne :

$$y = 8 - x.$$

On remplace dans la deuxième :

$$2x - (8 - x) = 1.$$

Donc :

$$2x - 8 + x = 1$$

$$3x = 9$$

$$x = 3.$$

Puis :

$$y = 8 - 3 = 5.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = \{(3; 5)\}}.$$

5 Méthode par combinaison linéaire

Cette méthode consiste à additionner ou soustraire les deux équations afin d'éliminer une inconnue.

Exemple

Résoudre :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

On additionne les deux équations :

$$(2x + y) + (3x - y) = 7 + 8.$$

Donc :

$$5x = 15.$$

Ainsi :

$$x = 3.$$

On remplace dans :

$$2x + y = 7.$$

Donc :

$$6 + y = 7.$$

Ainsi :

$$y = 1.$$

Finalement :

$$\boxed{S = \{(3; 1)\}}.$$

6 Multiplier une équation

Parfois, aucune inconnue ne s'élimine directement.
On peut alors multiplier une équation par un nombre.

Exemple

Résoudre :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

On multiplie la deuxième équation par -2 :

$$-2x + 2y = -2.$$

On obtient :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

On additionne :

$$5y = 5.$$

Donc :

$$y = 1.$$

Puis :

$$x - y = 1$$

donne :

$$x = 2.$$

Ainsi :

$$\boxed{S = \{(2; 1)\}}.$$

7 Interprétation graphique

Chaque équation du système correspond à une droite.
Résoudre un système revient à déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Exemple

Considérons :

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

On résout :

$$2x + 1 = -x + 7.$$

Donc :

$$3x = 6$$

et :

$$x = 2.$$

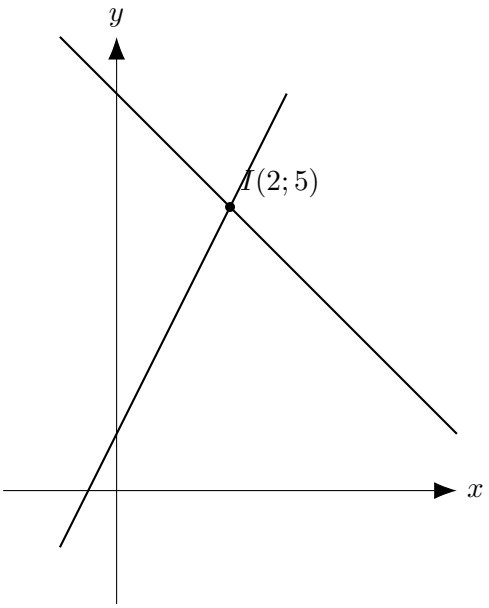
Alors :

$$y = 5.$$

Le point d'intersection est :

$$\boxed{I(2;5)}.$$

Schéma



8 Système avec une solution unique

Si les deux droites sont sécantes, le système possède une unique solution.

$$\boxed{S = \{(x_0; y_0)\}}$$

où $(x_0; y_0)$ est le point d'intersection.

9 Système sans solution

Considérons :

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Les deux droites ont le même coefficient directeur mais des ordonnées à l'origine différentes.
Elles sont parallèles.
Elles ne se coupent jamais.
Donc :

$$\boxed{S = \varnothing}.$$

10 Système avec une infinité de solutions

Considérons :

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2y = 4x + 2 \end{cases}$$

La deuxième équation est équivalente à :

$$y = 2x + 1.$$

Les deux équations représentent la même droite.
Tous les points de cette droite sont solutions.
Le système possède donc une infinité de solutions.

11 Choisir une méthode

On utilise généralement :

- la substitution lorsqu'une inconnue est facilement isolable ;
- la combinaison linéaire lorsqu'une inconnue peut être éliminée facilement.

12 Problèmes avec des systèmes

Les systèmes permettent de résoudre de nombreux problèmes.

Exemple

Dans un cinéma, on vend :

— des billets adultes à 10 euros ;

— des billets enfants à 6 euros.

Au total :

$$50$$

billets sont vendus pour :

$$420 \text{ euros.}$$

On note :

$$x = \text{nombre de billets adultes}$$

et :

$$y = \text{nombre de billets enfants.}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 10x + 6y = 420 \end{cases}$$

La résolution permet de déterminer x et y.

13 Méthodes à connaître

À la fin du chapitre, il faut savoir :

1. reconnaître un système de deux équations ;
2. vérifier qu'un couple est solution ;
3. résoudre un système par substitution ;
4. résoudre un système par combinaison linéaire ;
5. interpréter graphiquement une solution ;
6. reconnaître un système sans solution ;
7. reconnaître un système ayant une infinité de solutions ;
8. traduire un problème par un système ;
9. vérifier la cohérence d'une solution avec le problème.

À retenir

$$\boxed{\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}}$$

Une solution est un couple :

$$\boxed{(x; y)}$$

qui vérifie les deux équations.
Graphiquement :

$$\boxed{\text{résoudre un système = trouver l'intersection de deux droites}}.$$